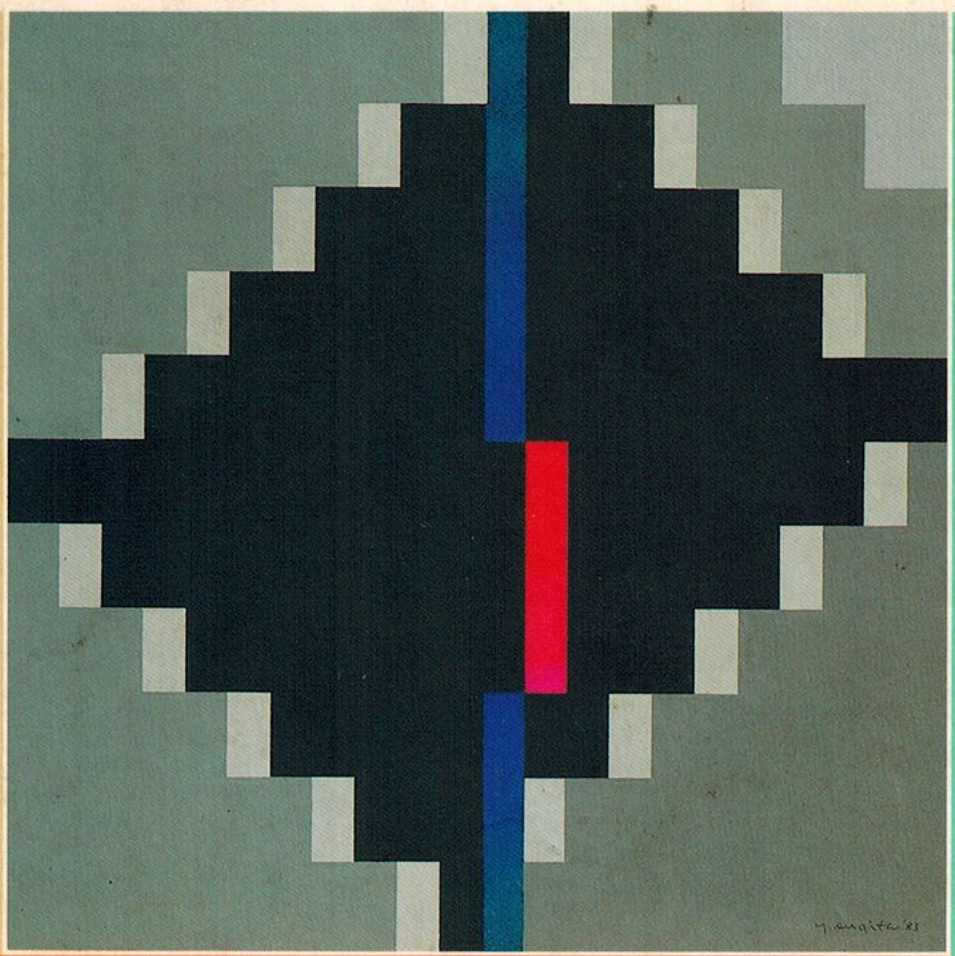
文部省検定済教科書 | 15 | 三省堂 | 数Ⅰ 092

改訂版

数学 Ⅰ

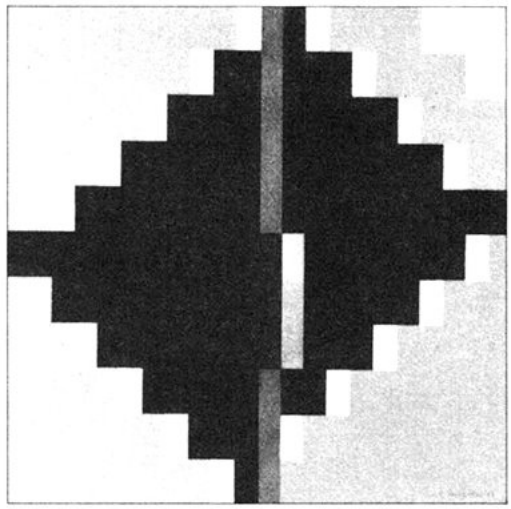
三省堂



昭和59年3月31日　文部省検定済　高等学校　数学科用　（数学Ⅰ）
昭和62年3月31日　改訂検定済

数学 Ⅰ

改訂版



阿部英一・稲垣信夫・工藤昭夫
田代嘉宏・旦代晃一・宮寺　功　ほか 編

三省堂

はじめに

紀元前 3000～4000 年の昔，すでに，バビロニアやエジプトにおいては，物品の交易，土地の測量，天文の観測などと関連して，かなりの数学的知識があったことがわかっている。このように，古くから数学はわれわれ人間の生活や文化と深いかかわりをもち，科学や技術の進歩にも大きな役割を果たしている。

数学的な方法においては，簡単な事柄に立脚して，論理的かつ体系的に法則を導いて，理論を構築していく。今日，科学的な方法といわれている過程は，種々の資料にもとづいて仮説を立て，それらから論理的に物事を導いていくというもので，これは数学的な考え方にほかならない。したがって，現在では，自然科学のみならず社会科学の分野を学ぶにも，数学的な考え方や知識が必要不可欠である。

本書は，高等学校「数学Ⅰ」の教科書として，中学校および高等学校の数学教育の現状をふまえながら，文部省の学習指導要領にもとづいて編修したもので，全体を通じて次の点に留意した。

(1) 数学的考え方の筋道をはっきりさせ，数学的素養が身につくように努めた。

(2) 中学校の数学に留意しながら，内容の導入や配列を工夫した。

(3) 問題解決の能力が向上するような例や例題を多く示した。

「数学Ⅰ」は，選択科目の数学を学ぶための共通の基礎であるので，しっかり理解することが大切である。それには，教科書にただ目を通すだけでなく，自分で考え，自力で問題を解いていく気構えが必要である。

もくじ

第1章　数と集合　1

1節　実数　2

1　実数と数直線　3
2　実数の性質　4
3　実数の絶対値　7
練習問題　8

2節　平方根の計算　9

1　平方根と分母の有理化　10
2　二重根号の簡約　11
練習問題　11

3節　集合　12

1　集合と要素　12
2　部分集合　13
3　和集合と共通部分　15
4　全体集合と補集合　16
練習問題　18
第1章の問題　19

第2章　式の計算　21

1節　整式とその加法・減法　22

1　整式　22
2　加法と減法　24
練習問題　25

2節　整式の乗法　26

1　指数法則　27
2　乗法　27
3　乗法公式　28
練習問題　30

3節　整式の因数分解　31

1　因数分解　31
2　因数分解の工夫　34
練習問題　35

4節　整式の除法と分数式　36

1　整式の商と余り　36
2　整式の約数と倍数　38
3　分数式　40
4　分数式の加法と減法　41
5　分数式の乗法と除法　42
練習問題　43

5節　指数の拡張　44

練習問題　46
第2章の問題　47

第3章 方程式と不等式 49

1節 2次方程式とその解 50

2節 複素数 52

1 実数から複素数への数の拡張 52
2 複素数の四則計算 53
3 負の実数の平方根 55
練習問題 57

3節 2次方程式の解の公式と判別式 58

1 解の公式 58
2 判別式 60
練習問題 62

4節 2次方程式の解と係数の関係 63

1 解と係数の関係 63
2 2次式の因数分解 64
練習問題 65

5節 連立方程式 66

1 連立1次方程式 66
2 1次と2次の連立方程式 67
練習問題 69

6節 因数定理と高次方程式 70

1 因数定理 70
2 高次方程式 73
練習問題 75

7節 不等式 76

1 不等式とその解 76
2 2次不等式 78
練習問題 84
第3章の問題 85

第4章 式と証明 87

1節 等式の証明 88

1 恒等式 88
2 条件つき等式 92
3 比例式 93
練習問題 94

2節 不等式の証明 95

1 不等式と証明 95
2 絶対値を含む不等式 98
練習問題 99

3節 命題と論理 100

1 命題 100
2 必要条件と十分条件 101
3 命題と集合 103
4 対偶と背理法 106
練習問題 108
第4章の問題 109

第5章　関数　111

1節　関数とそのグラフ　112

1　変数と関数　112
2　定義域と値域　113
3　座標平面と関数のグラフ　114

2節　2次関数とそのグラフ　116

1　$y = ax^2$ のグラフ　116
2　$y = ax^2 + c$ のグラフ　117
3　$y = a(x - p)^2$ のグラフ　118
4　$y = a(x - p)^2 + q$ のグラフ　119
5　$y = ax^2 + bx + c$ のグラフ　120
練習問題　121

3節　2次関数の最大と最小　122

練習問題　124

4節　2次関数と方程式・不等式　125

1　2次関数のグラフと2次方程式　125
2　2次関数のグラフと2次不等式　127
練習問題　129

5節　分数関数とそのグラフ　130

1　$y = \frac{a}{x}$ のグラフ　130
2　$y = \frac{a}{x - p} + q$ のグラフ　131
練習問題　133

6節　無理関数とそのグラフ　134

1　$y = \sqrt{ax}$ のグラフ　134
2　$y = \sqrt{ax + b}$ のグラフ　136
練習問題　137

7節　逆関数とそのグラフ　138

1　逆関数　138
2　逆関数のグラフ　140
練習問題　141
発展　x の範囲によって異なる式で表される関数　142
第5章の問題　143

第6章　平面図形と式　145

1節　点の座標　146

1　直線上の点の座標　146
2　平面上の点の座標　149
練習問題　152

2節　直線の方程式　153

練習問題　155

3節　2直線の関係　156

1 平行な2直線 156
2 垂直な2直線 157
3 点と直線の距離 159
4 座標を用いた図形の性質の証明 160
練習問題 161

4節 円と直線 162
1 円の方程式 162
2 円の接線 165
3 円と直線の共有点 166
練習問題 167

5節 軌跡の方程式 168
練習問題 170

6節 不等式の表す領域 171
1 不等式の表す領域 171
2 円の内部と外部 173
3 連立不等式の表す領域 174
4 領域と最大値・最小値 176
練習問題 177
発展 点と直線の距離 178
第6章の問題 179

第7章 三角比 181

1節 鋭角の三角比 182
1 正弦，余弦，正接 182
2 三角比の値 184

2節 三角比の相互関係 186
1 正弦，余弦，正接の関係 186
2 $90^\circ - A$ の三角比 187
練習問題 188

3節 三角比の拡張 189
1 0° から 180° までの角の三角比 189
2 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のときの三角比の相互関係 192
練習問題 193

4節 正弦定理と余弦定理 194
1 正弦定理 194
2 余弦定理 197
3 三角形の面積 200
練習問題 202
発展 ヘロンの公式 203
第7章の問題 205

解答 207
さくいん 211
ギリシア文字 213
おもな数学者と数学の歩み 214
平方・平方根・逆数表 216
三角比の表 217

この本の手引き

例 〉本文の理解を助けるための式やその計算などの具体例を示したものです。

例題 〉各項目の内容を理解するための基本的かつ代表的な問題をとりあげたものです。解 〉や 証明 〉は，解法や証明法の過程の1例を示したものです。問などの問題を解くときの参考にして下さい。

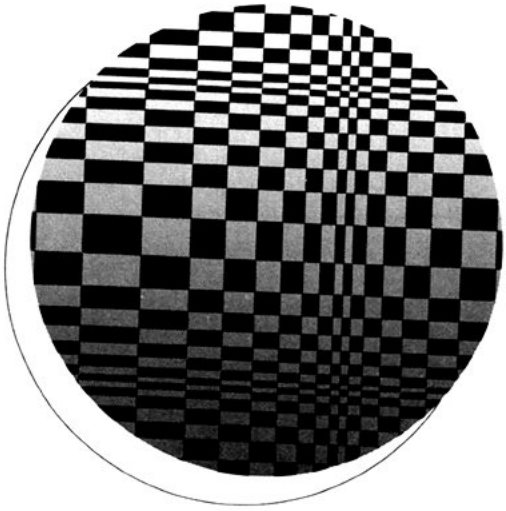
問 〉学習内容の理解を確かにするための問題です。例題 〉のすぐあとには，対応する問題を示してあります。

〈注意〉本文の注に相当する内容を示し，説明の補いとしました。

練習問題　節末には，その節の学習内容を身につけるための問題を示してあります。なお，いくつかの節では練習問題を略しました。

各章の問題　各章末には，その章全体の復習と応用をかねて，問題を示してあります。そのうち，**A** は復習をねらいとした基本的な問題で，**B** は応用力を養うための程度のやや高い問題です。

発展　第5, 6, 7章では，本文以外に参考として，その章の発展的な内容が示してあります。



第1章 数と集合

1節・実　数
2節・平方根の計算
3節・集　合

中学校では，正の整数と負の整数，および分数の形で表される有理数を学び，さらに，正の数の平方根のなかに有理数とはならない $\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ などの無理数があることを知った。また，数の世界が拡張されていくとき，これらの数が基礎となって数学の内容がますます深まっていくことも知った。

巻末の年表にも示されるように，新しい数の概念の発見は，人間の文化の発達のなかでもとくに重要である。

この章では，いままで用いられてきた数を分類し，新しく現れる数の性質を理解する用意として，それらの数の概念を定義しなおすとともに，カントルによって得られた集合の概念にこれらの数を結びつけて，より論理的な数学的思考を学んでいく。

〖1節〗 実　数

1 実数と数直線

ものの順序や個数を表すのに使われる数

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots$$

を正の整数，または，**自然数**という。自然数 m, n について，その和 $m+n$ および積 mn は自然数となる。また，

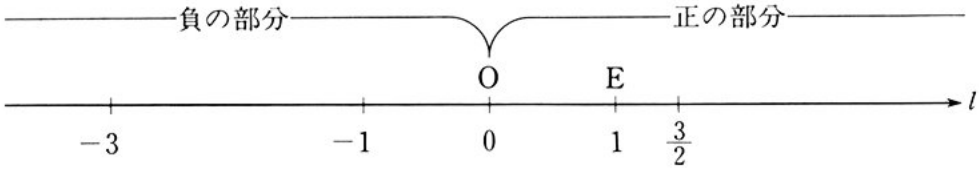
$$-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ \cdots\cdots$$

のような数を負の整数という。自然数に負の整数および0を合わせたものを**整数**という。2つの整数 m, n について，和 $m+n$，差 $m-n$，積 mn は整数となる。

整数 m と0でない整数 n によって，分数 $\dfrac{m}{n}$ の形に表される数を**有理数**という。とくに，整数 m は分数 $\dfrac{m}{1}$ で表されるから有理数である。

有理数 p, q について，和 $p+q$，差 $p-q$，積 pq，および0でない q について，商 $\dfrac{p}{q}$ は有理数となる。このことを，有理数は四則計算について**閉じている**という。

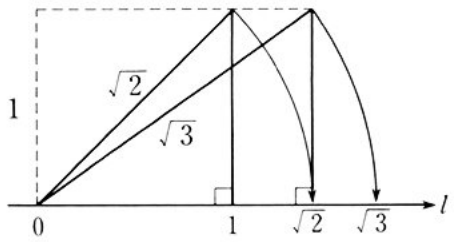
1つの直線 l 上に2つの点O, Eを定めて，点Oには数0を，点Eには数1を対応させる。このとき，Oを**原点**，Eを**単位点**といい，Oを境としてEを含む部分を正の部分，Eを含まない部分を負の部分という。



中学校で学んだように，この直線 l 上の点で有理数を表すことができる。たとえば，O からの距離が線分 OE の長さの $\frac{3}{2}$ 倍で，正の部分にある点は $\frac{3}{2}$ を表す。また，負の部分にあって，O からの距離が線分 OE の長さの 3 倍である点は -3 を表す。有理数とならない数

$$\sqrt{2} = 1.41421\cdots\cdots, \quad \sqrt{3} = 1.73205\cdots\cdots$$

などを **無理数** といい，右の図のようにして，無理数も直線 l 上の点として表すことができる。



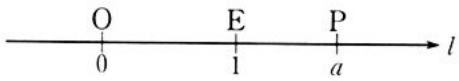
このようにして，直線 l 上の点として表される数を **実数** という。

このように拡張された数についてまとめると，次のようになる。

実数 ┬ 有理数 ┬ 整数 ┬ 自然数
　　 │　　 │　　 ├ 0
　　 │　　 │　　 └ 負の整数
　　 │　　 └ 整数以外の有理数
　　 └ 無理数

1 つの直線 l について，l 上の点全体が実数全体を表すと考えるとき，この直線 l を **数直線** という。

数直線上の点 P に対応する実数 a を点 P の **座標** という。



座標が a である点 P を P(a) と表す。

〈注意〉 ふつう，数直線をかくときには，正の部分を O の右側にとる。

問1 数直線をかいて，その直線上に次の各点を示せ。

-1, 　3, 　-1.2, 　0.7, 　$-\sqrt{3}$

2 実数の性質

実数も有理数と同様に，四則演算について閉じている。すなわち，a, b を実数とするとき，和 $a+b$，差 $a-b$，積 ab，0 でない b について，商 $\frac{a}{b}$ も実数である。

実数の演算について，次の 3 つの法則が成り立つ。

交換法則　　$a+b=b+a$,　　$ab=ba$

結合法則　　$(a+b)+c=a+(b+c)$,　　$(ab)c=a(bc)$

分配法則　　$a(b+c)=ab+ac$,　　$(a+b)c=ac+bc$

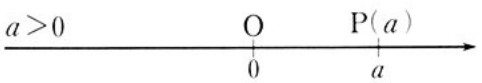
実数 a, b について，$ab=0$ とする。$a \neq 0$ のとき，$ab=0$ の両辺に $\frac{1}{a}$ を掛けると，$b=0$ となる。$a=0$ のときを含めて考えると，次のことがいえる。

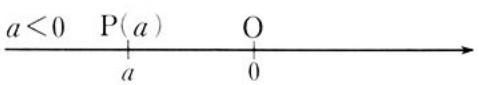
$ab=0$ ならば，　$a=0$ または $b=0$

右の図のような数直線上で，点 $\mathrm{P}(a)$ の右側に点 $\mathrm{P}(b)$ があるとき，a より b が大きい，または，a は b より小さいという。このことを不等号を用いて

$$a<b \quad \text{あるいは} \quad b>a$$

と表す。とくに，a が数直線の正の部分にあるとき，a を正の実数といい，負の部分にあるとき，a を負の実数という。すなわち

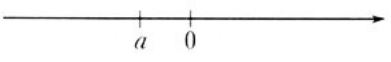




a が正の実数のとき　$a>0$,

a が負の実数のとき　$a<0$

問2 》 右の図において，$-2a$ と $3a$ を数直線上に記入して，大きい方をいえ。



$a > b$ または $a = b$ であることを

$$a \geqq b \quad \text{あるいは} \quad b \leqq a$$

と表す。記号 $\geqq$, $\leqq$ も不等号という。

実数の間の大小について，次の基本性質が成り立つ。

実数の大小についての基本性質

I．実数 a, b の間には，次のうち1つだけが成り立つ。

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b$$

II．実数 a, b, c について

$a > b$ かつ $b > c$ ならば， $a > c$

III．任意の実数 c について

$a > b$ ならば， $a + c > b + c$, $a - c > b - c$

IV．$a > b$ かつ $c > 0$ ならば， $ac > bc$, $\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$

$a > b$ かつ $c < 0$ ならば， $ac < bc$, $\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$

例題1 2つの実数 a, b について，次のことを証明せよ。

(1) $a > b$ ならば， $a - b > 0$

(2) $a - b > 0$ ならば， $a > b$

証明 (1) $a > b$ の両辺に $-b$ を加えると

$a + (-b) > b + (-b)$, よって $a - b > 0$

ゆえに $a > b$ ならば， $a - b > 0$

(2) $a - b > 0$ の両辺に b を加えると

$a - b + b > 0 + b$, よって $a > b$

ゆえに $a - b > 0$ ならば， $a > b$

例題1より，実数 a, b について「$a > b$ ならば，$a - b > 0$」が成り立ち，また逆に，「$a - b > 0$ ならば，$a > b$」も成り立つ。このことを

$$a > b \iff a - b > 0$$

と記号 $\iff$ を用いて表す。

問3 2つの実数 a, b について，次のことを証明せよ。

$$a < b \iff a - b < 0$$

また，実数の間の和，積と符号の関係は，次のような規則にまとめられる。

演算と符号の規則

I．$a > 0$ かつ $b > 0$ ならば，　$a + b > 0$

II．$a < 0$ かつ $b < 0$ ならば，　$a + b < 0$

III．a と b が同符号 $\iff ab > 0$

IV．a と b が異符号 $\iff ab < 0$

III から，次のことが成り立つ。

$a^2 \geqq 0$ であり，等号が成り立つのは，$a = 0$ のときに限る。

問4 次のことはそれぞれ成り立つか。成り立たない場合は，それぞれその例を1ついえ。

(1) $a + b > 0$ ならば，$a > 0$ かつ $b > 0$ である。

(2) $ab > 0$ ならば，$a > 0$ かつ $b > 0$ である。

(3) $\dfrac{a}{b} < 0$ ならば，$a < 0$ かつ $b > 0$ である。

(4) $a + b < 0$ かつ $ab > 0$ ならば，$a < 0$ かつ $b < 0$ である。

(5) $a^2 + b^2 = 0$ ならば，$a = 0$ かつ $b = 0$ である。

3 実数の絶対値

任意の実数 a について，その絶対値を記号 | | を用いて $|a|$ と表し，次のように定める。

$$\begin{cases} a>0 \text{ のとき} & |a|=a \\ a=0 \text{ のとき} & |a|=0 \\ a<0 \text{ のとき} & |a|=-a \end{cases}$$

このことから，次のことが成り立つ。

$|a| \geqq 0$ であり，等号の成り立つのは $a=0$ のときに限る。

$|a| \geqq a$ であり，等号の成り立つのは $a \geqq 0$ のときに限る。

さらに，$(-a)^2=a^2$ より，$|a|^2=a^2$ が成り立つ。

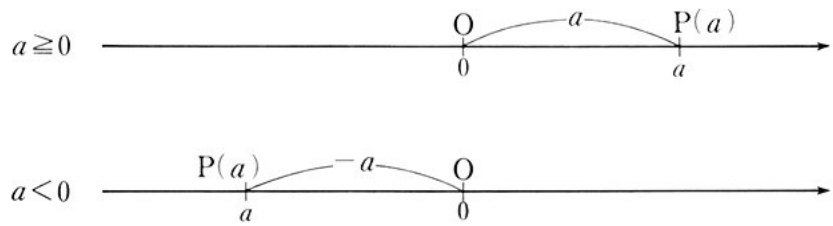
例1 ① $|2|=2$　　② $|-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$

③ $|1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1$

問5 次の実数の絶対値をいえ。

(1) -5　　(2) $-\sqrt{2}$　　(3) $-(-7)$　　(4) $2-\sqrt{5}$

数直線上で点 P(a) と原点 O との距離を OP と書く。距離 OP は正の実数，または，0 である。数直線上に原点 O と点 P(a) を表すとき，a の符号によって，次の 2 つの場合がある。



上の図より，$|a|$ は点 P(a) と原点 O との距離 OP に等しいことがわかる。

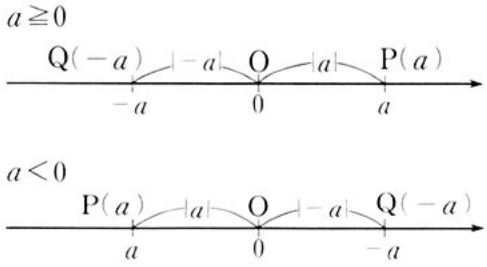
実数 a について，点 $\mathrm{P}(a)$ と点 $\mathrm{Q}(-a)$ の原点からの距離が等しいので

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OQ}$$

すなわち

$$|a| = |-a|$$

が成り立つ。



絶対値についての基本的性質をまとめると，次のようになる。

絶対値の性質

I．$|a| \geqq 0$　　等号が成り立つのは $a = 0$ のときに限る。

$|a| \geqq a$　　等号が成り立つのは $a \geqq 0$ のときに限る。

II．$|a|^2 = a^2$，$|a| = |-a|$

III．$|ab| = |a||b|$，$\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

問6 $|ab| = |a||b|$，$\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ が成り立つことを，次の場合について確かめよ。

(1)　$a = 3$，$b = -4$　　(2)　$a = -3$，$b = -4$

練習問題

1.　$a + b > 0$ かつ $ab > 0$ ならば，$a > 0$ かつ $b > 0$ であることを示せ。

2.　次の式を絶対値の記号を用いずに表せ。

(1)　$|x - 2|$　　(2)　$|1 - x|$

3.　$|x - 3| = 5$ となる x の値をすべて求めよ。

〖2節〗 平方根の計算

1 平方根と分母の有理化

平方して実数 a になる数，すなわち

$$x^2 = a$$

になる x を，a の **平方根** という。

$$(\sqrt{a})^2 = a$$
$$(-\sqrt{a})^2 = a$$

正の実数 a の平方根は，正と負の2つあり，根号 $\sqrt{\ }$ を用いて

正の方を $\sqrt{a}$，　負の方を $-\sqrt{a}$

で表す。たとえば，9の平方根は $\sqrt{9} = 3, -\sqrt{9} = -3$ の2つである。

問1 》 7の2つの平方根を根号を用いて表せ。

0の平方根については，$0^2 = 0$ であるから，$\sqrt{0} = 0$ と定める。

どんな実数 a についても，$a^2 \geqq 0$ であるから，負の実数の平方根は，実数の範囲では存在しない。

実数 a について，$|a|^2 = a^2$ であり，$|a| \geqq 0$ であるから

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

すなわち

$a \geqq 0$ のとき，　$\sqrt{a^2} = a$

$a < 0$ のとき，　$\sqrt{a^2} = -a$

問2 》 $\sqrt{5^2}, \sqrt{(-5)^2}$ をそれぞれ整数でいえ。

平方根の積と商の性質については，中学校で次のことを学んだ。

平方根の積と商

$a > 0,\ b > 0$ のとき

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}, \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

また，前ページの平方根の積と商の式において，$k>0$ として，$b=k^2$ とすることにより，次のことがわかる。

$$k>0 \text{ のとき，} \quad \sqrt{k^2a}=k\sqrt{a}, \quad \sqrt{\frac{a}{k^2}}=\frac{\sqrt{a}}{k}$$

問3 次の計算をせよ。

(1) $\sqrt{6}\sqrt{5}$　　(2) $\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{8}}$　　(3) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$　　(4) $\sqrt{48}$

例1 ① $\sqrt{24}+\sqrt{\frac{6}{25}}=\sqrt{2^2\times 6}+\sqrt{\frac{6}{5^2}}=2\sqrt{6}+\frac{\sqrt{6}}{5}$

$$=\left(2+\frac{1}{5}\right)\sqrt{6}=\frac{11\sqrt{6}}{5}$$

② $(\sqrt{5}+2\sqrt{2})(3\sqrt{5}-\sqrt{2})$

$=3(\sqrt{5})^2+(6-1)\sqrt{5}\sqrt{2}-2(\sqrt{2})^2$

$=15+5\sqrt{10}-4=11+5\sqrt{10}$

問4 次の計算をせよ。

(1) $4\sqrt{2}+7\sqrt{8}-\sqrt{50}$　　(2) $\sqrt{18}+\sqrt{32}-\sqrt{\frac{2}{9}}$

(3) $(\sqrt{6}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})$　　(4) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$

分母に根号を含む式，たとえば

$$\frac{2}{3\sqrt{6}}, \quad \frac{5}{4+\sqrt{3}}$$

は，次のようにして，分母に根号を含まない式に変形できる。このことを **分母を有理化する** という。

$$\frac{2}{3\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{3\times 6}=\frac{\sqrt{6}}{9}$$

$$\frac{5}{4+\sqrt{3}}=\frac{5(4-\sqrt{3})}{(4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}=\frac{20-5\sqrt{3}}{4^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{20-5\sqrt{3}}{13}$$

問5 次の式の分母を有理化せよ。

(1) $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$　　(2) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

(3) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$　　(4) $\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}$

2 二重根号の簡約

根号を二重に含む式は，次のようにして簡単にできることがある。

たとえば，$\sqrt{8-2\sqrt{15}}$ について，

$$\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

とおく。ただし，$a>b>0$ とする。ここで，両辺を平方すると

$$8-2\sqrt{15}=(a+b)-2\sqrt{ab}$$

両辺をくらべて，$a+b=8$，$ab=15$ より，　$a=5,\ b=3$

したがって，$\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$ となる。このような変形を二重根号をはずすという。一般に，次のことがいえる。

二重根号の簡約

$a>0,\ b>0$ のとき　$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$a>b>0$ のとき　$\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

例2 ① $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{(2+3)+2\sqrt{2\times3}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$

② $\sqrt{7-2\sqrt{10}}=\sqrt{(5+2)-2\sqrt{5\times2}}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$

問6 次の式を二重根号をはずすことによって，簡単にせよ。

(1) $\sqrt{14-2\sqrt{45}}$　　(2) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$　　(3) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$

練習問題

1. $a=3\sqrt{2}+\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ とするとき，次の計算をせよ。

(1) $a+b$　　(2) $a-b$　　(3) ab　　(4) $\dfrac{b}{a}$

2. $a=\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$，$b=\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ とするとき，次の計算をせよ。

(1) $a+b$　　(2) ab　　(3) $(a-b)^2$　　(4) a^2+b^2

〖3節〗集　合

1 集合と要素

5以下の自然数の全体とか，正の実数の全体のように，一定の条件を満たすものの集まりについて考えることが多い。

このような，ある条件を満たすものの集まりを **集合** という。集合をつくっている個々のものをその集合の **要素** という。

例1 〉 次の①～④は，いずれも集合を表す。

① 18の約数の全体　② 正の偶数の全体

③ 正の実数の全体　④ $2x + 3 > 0$ を満たす実数の全体

〈**注意**〉 自然数の約数や倍数については，自然数の範囲で考えることにする。

集合を表すには

すべての要素を書き並べて表す方法

要素の満たす条件を示して表す方法

の2つの方法がある。

たとえば，例1の①，②の集合は，要素を書き並べることによって，それぞれ

$$\{1, 2, 3, 6, 9, 18\},\quad \{2, 4, 6, 8, 10, \cdots\cdots\}$$

と表され，③の集合は，要素の満たす条件を示すことによって

$$\{x \mid x > 0,\quad x \text{ は実数}\}$$

と表される。

問1 〉 次の集合を上にならって，適当な方法で表せ。

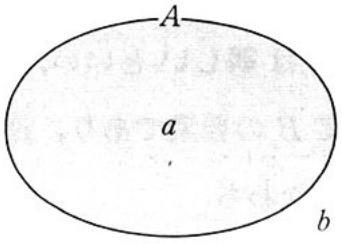
(1) 12の約数の全体　(2) $2x^2 = 4$ の解の全体

(3) 3の倍数の全体　(4) 負の実数の全体

a が集合 A の要素であるとき，a は集合 A に **属する** といい，

$$a \in A \quad \text{あるいは} \quad A \ni a$$

と書く。また，b が集合 A の要素でないとき，b は集合 A に **属さない** といい，



$$b \notin A \quad \text{あるいは} \quad A \not\ni b$$

と書く。

例2 〉 自然数全体の集合を N とすると，$10 \in N$, $\sqrt{3} \notin N$

問2 〉 有理数全体の集合を Q とするとき，次の数が Q に属するかどうかを記号 $\in$, $\notin$ を用いて表せ。

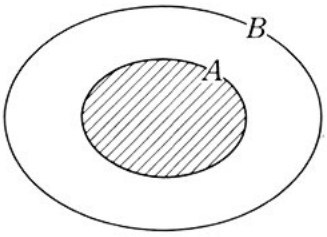
$$3.1, \quad \frac{9}{4}, \quad 100, \quad -\frac{2}{11}, \quad \sqrt{5}$$

2 部分集合

2つの集合 A, B について，A のどの要素もすべて B の要素になっているとき，A は B の **部分集合** であるといい，

$$A \subseteqq B \quad \text{あるいは} \quad B \supseteqq A$$

と書く。



例3 〉 $\{1, 3, 5, 7\} \subseteqq \{n \mid n \text{ は } 10 \text{ 以下の奇数}\}$

2つの集合 A, B について，$A \subseteqq B$ であることは，A のどの要素もすべて B の要素になっているので，記号 $\in$ を用いて表すと

$$x \in A \quad \text{ならば} \quad x \in B$$

となることである。

問3 〉 次の集合は集合 $\{x \mid x > 1, x \text{ は実数}\}$ の部分集合かどうかをいえ。

(1) $\{x \mid 2x > 1, x \text{ は実数}\}$　(2) $\{p \mid p \text{ は } 10 \text{ 以下の素数}\}$

2つの集合 A, B が同じ要素から成り立っているとき，集合 A と集合 B は **等しい** といい，$A = B$ と表す。このとき，A のどの要素もすべて B の要素であり，逆に，B のどの要素もすべて A の要素である。

すなわち

$$a \in A \iff a \in B$$

したがって，次のことが成り立つ。

$$A \subseteqq B \text{ かつ } B \subseteqq A \iff A = B$$

また，$A = B$ が成り立たないとき，2つの集合 A と B は **等しくない** といい，$A \neq B$ と表す。

例4 〉 $A = \{2, 4, 6, 8, \cdots\cdots\}$, $B = \{x \mid x = 2n,\ n \text{ は自然数}\}$

のとき，$A = B$ である。

問4 〉 次の3つの集合 A, B, C の間の関係を記号 $\subseteqq$，あるいは，$=$ を用いて表せ。

$A = \{x \mid x \text{ は } 6 \text{ の約数}\}$,　$B = \{1, 2, 3, 4\}$,

$C = \{x \mid x \text{ は } 12 \text{ の約数}\}$

要素が1つもないものも，集合の特別な場合と考え，これを **空集合**（くう）とよび，ϕ で表す。

空集合 ϕ は，どの集合に対しても，その部分集合であるとみなす。すなわち，どんな集合 A についても $\phi \subseteqq A$ である。

例5 〉 集合 $\{1, 2, 3\}$ の部分集合は，次の8つである。

$\{1, 2, 3\}$,　$\{1, 2\}$,　$\{1, 3\}$,　$\{2, 3\}$,　$\{1\}$,　$\{2\}$,　$\{3\}$,　ϕ

問5 〉 集合 $\{x \mid x \text{ は正で，5以下の奇数}\}$ の部分集合をすべて書け。

集合 A, B について，$A \subseteqq B$ であるが，$A \neq B$ のとき，A は B の **真部分集合** であるといい，$A \subset B$ あるいは $B \supset A$ と書くことがある。

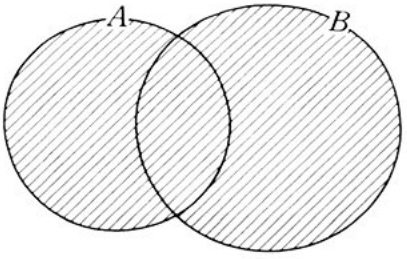
問6 〉 集合 $\{-1, 0, 1\}$ の部分集合のうち，真部分集合をすべていえ。

3 和集合と共通部分

2つの集合 A, B について，A と B の少なくとも一方に属している要素全体の集合を，A と B の **和集合** または結びといい，

$$A \cup B$$

と書く。



すなわち

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$

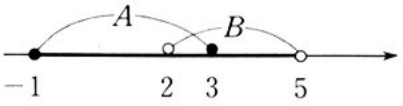
である。

例 6 ① $A = \{1, 3, 6, 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$ のとき

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 10\}$$

② $A = \{x \mid -1 \leqq x \leqq 3\}$, $B = \{x \mid 2 < x < 5\}$ のとき

$A \cup B = \{x \mid -1 \leqq x < 5\}$



問7 次の集合を求めよ。

(1) $\{1, 4, 8\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10\}$

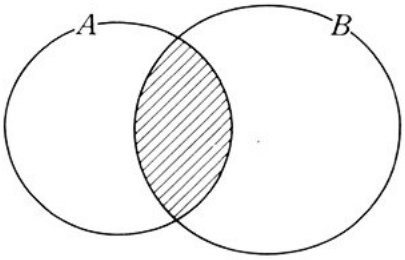
(2) $\{1, 2\} \cup \{x \mid -1 < x < 2\}$

(3) $\{x \mid -3 < x < 2\} \cup \{x \mid -2 \leqq x \leqq 5\}$

2つの集合 A, B の両方に属している要素全体の集合を，A と B の **共通部分** または交わりといい，

$$A \cap B$$

と書く。すなわち



$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$

である。

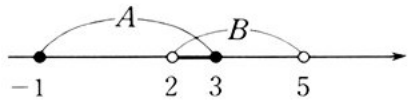
A と B に共通の要素が1つもないときは，$A \cap B = \phi$ である。

例7 ① $A=\{1,3,6,10\}$, $B=\{1,3,5,7\}$ のとき

$$A\cap B=\{1,3\}$$

② $A=\{x\mid -1\leqq x\leqq 3\}$, $B=\{x\mid 2<x<5\}$ のとき

$$A\cap B=\{x\mid 2<x\leqq 3\}$$



③ $A=\{2,4,6,8,\cdots\cdots\}$, $B=\{1,3,5,7,\cdots\cdots\}$ のとき

$$A\cap B=\phi$$

問8 次の集合を求めよ。

(1) $\{1,4,8,12\}\cap\{2,4,6,8,10\}$

(2) $\{x\mid x<3\}\cap\{x\mid 0<x<4\}$

(3) $\{x\mid -3\leqq x\leqq 2\}\cap\{x\mid -2<x<5\}$

(4) $\{4,6,8\}\cap\{x\mid x$ は9以下の素数$\}$

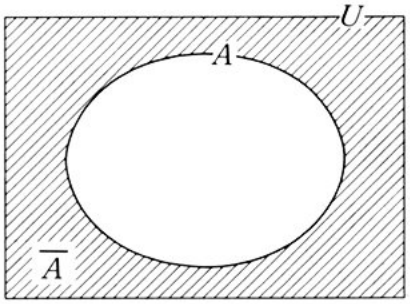
4 全体集合と補集合

約数とか倍数について考えるとき，自然数全体の集合の要素に限って考えるのがふつうである。また，絶対値を考えるときには，実数全体の集合の要素に限って考えてきた。このように，数学においては，はじめに1つの集合 U を定めておき，U の部分集合や，U の要素について考える必要がある。このとき，U を **全体集合** という。

全体集合 U の中で，部分集合 A が与えられているとき，A に属さない要素全体の集合を，A の **補集合** といい，記号 $\overline{A}$ で表す。すなわち

$$\overline{A}=\{x\mid x\in U \text{ かつ } x\notin A\}$$

である。



例8 ① $U=\{x \mid x$ は10以下の自然数$\}$ を全体集合とするとき，

$A=\{1, 3, 6, 10\}$ の補集合は

$$\overline{A}=\{2, 4, 5, 7, 8, 9\}$$

② $U=\{x \mid x$ は負の実数$\}$ を全体集合とするとき，

$A=\{x \mid -5 \leqq x \leqq -1\}$ の補集合は

$$\overline{A}=\{x \mid x<-5 \text{ または } -1<x<0\}$$

③ $U=\{x \mid x$ は9以下の素数$\}$ を全体集合とするとき，

$A=\{2, 3, 5, 7\}$ の補集合は

$$\overline{A}=\phi$$

問9 $U=\{2, 4, 6, 8, 10\}$ を全体集合とするとき，次の集合の補集合を求めよ。

(1) $\{4, 6\}$　　(2) $\{2, 4, 8\}$　　(3) U　　(4) ϕ

集合 A とその補集合 $\overline{A}$ について，次のことが成り立つ。

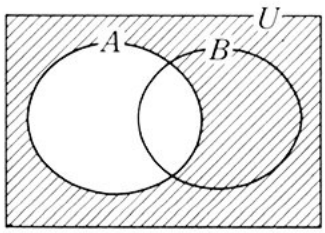
$\overline{A}$ の補集合は A である。すなわち $\overline{(\overline{A})}=A$

$$A \cap \overline{A}=\phi$$

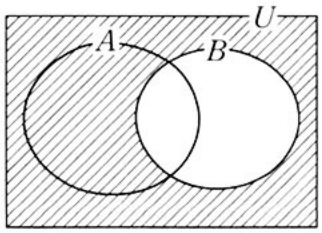
$$A \cup \overline{A}=U$$

全体集合 U の2つの部分集合 A, B について，2つの集合 $\overline{A \cap B}$ および $\overline{A} \cup \overline{B}$ を考えてみる。下の図の斜線の部分を考えると，この2つの集合が等しいことがわかる。すなわち

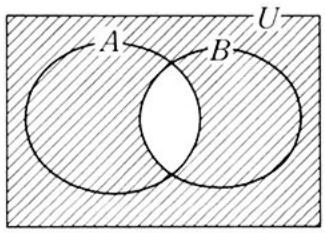
$$\overline{A \cap B}=\overline{A} \cup \overline{B}$$



$\overline{A}$



$\overline{B}$



$\overline{A \cap B}$

同様にして，$\overline{A \cup B}$ および $\overline{A} \cap \overline{B}$ についても

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

が成り立つ。

これらの等式を **ド=モルガンの法則** という。

ド=モルガンの法則

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

問10 》 $U = \{n \mid n$ は1から15までの自然数$\}$ を全体集合とし，A, B をそれぞれ，$\{n \mid n$ は2の倍数$\}$，$\{n \mid n$ は3の倍数$\}$ とする。このとき，次の集合を求めよ。

(1) $\overline{A}$　　(2) $\overline{B}$　　(3) $\overline{A} \cup \overline{B}$

(4) $\overline{A} \cap \overline{B}$　　(5) $\overline{A \cup B}$　　(6) $\overline{A \cap B}$

練習問題

1. 全体集合を $U = \{x \mid x$ は整数$\}$ とするとき，不等式 $-2 < x + 1 \leqq 4$ の解の集合を求めよ。また，全体集合を $U = \{x \mid x$ は正の実数$\}$ とするとき，不等式 $-2 < x + 1 \leqq 4$ の解の集合を求めよ。

2. $A = \{2, 4, 8\}$，$B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ とするとき，次の集合と A，B の関係を記号 $\subseteqq$，$=$ を用いて表せ。

(1) $C = \{x \mid x$ は24の約数$\}$

(2) $D = \{x \mid x$ は15以下の素数$\}$

(3) $E = \{x \mid 0 < x < 20, x$ は整数$\}$

第1章の問題

A

1. 次の各組の2つの数の数直線上での距離を求めよ。ただし，$a > 0$, $b < 0$ とする。

(1) $4,\ -2$　　(2) $-\frac{1}{3},\ -\frac{1}{2}$　　(3) $a,\ b$

2. 実数 a, b, c, d について，次のことが成り立つことを証明せよ。

$a > b$ かつ $c > d$ ならば，　$a + c > b + d$

3. $a = 1 + \sqrt{2}$, $b = 1 - \sqrt{3}$ とするとき，次の計算をせよ。

(1) $|a + b|$　　(2) $|a - b|$

(3) $|a| + |b|$　　(4) $|a| - |b|$

4. 次の式を簡単にせよ。

(1) $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})$

(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}(1 - \sqrt{3})}$　　(3) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{6}} - \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

(4) $\left(\dfrac{1 + \sqrt{7}}{1 - \sqrt{7}}\right)^2 - \left(\dfrac{1 - \sqrt{7}}{1 + \sqrt{7}}\right)^2$

5. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) $x^2 + y^2 + xy$　　(2) $\dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$

(3) $\dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{1}{y + 1}$　　(4) $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2}$

6. 次の式の二重根号をはずして，簡単な式にせよ。

(1) $\sqrt{21 - 12\sqrt{3}}$　　(2) $\sqrt{\dfrac{11}{2} - 2\sqrt{6}}$

7. $U = \{x \mid x$ は正の実数$\}$ を全体集合とし，その部分集合を，

$A = \{x \mid 0 < x \leqq 4\}$,　　$B = \{x \mid 3 < x < 6\}$,

$C = \{x \mid 6 \leqq x \leqq 10\}$

とするとき，次の集合を求めよ。

(1) $A \cap B$　　(2) $B \cup C$　　(3) $B \cap C$　　(4) $\overline{A} \cap \overline{C}$

B

1. 次の□の中に，正または負のいずれかの語を入れよ。

(1) $a-b>0$ かつ $ab<0$ ならば，a は□，b は□である。

(2) $b-a>0$ かつ $\dfrac{a}{b}<0$ ならば，a は□，b は□である。

2. 次の式を絶対値の記号を用いずに表せ。

$$|x-1|+|x-2|$$

3. $x=\sqrt{4-\sqrt{15}}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $x+\dfrac{1}{x}$　　(2) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$　　(3) $x^2-\dfrac{1}{x^2}$

4. 次の計算をせよ。

(1) $\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}-\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^2$

(2) $\dfrac{2}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}+\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}-\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{3-\sqrt{5}}}-\dfrac{1}{\sqrt{3+\sqrt{5}}}$

5. $a\leqq\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}<a+1$ を満たす整数 a を求めよ。さらに，

$a+b=\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$ であるとき，$a^2+2ab+2b^2$ の値を求めよ。

6. $U=\{x\mid 1\leqq x\leqq 50, x$ は整数$\}$ を全体集合とし，その部分集合を，

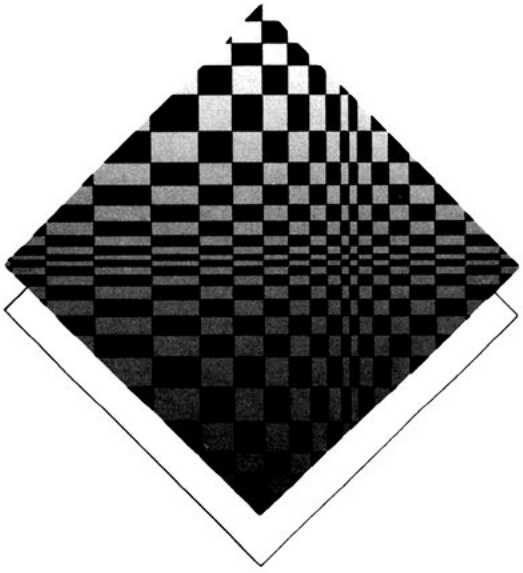
$A=\{x\mid x=2n, n$ は整数$\}$, $B=\{x\mid x=3n, n$ は整数$\}$,

$C=\{x\mid x=3n+1, n$ は整数$\}$

とするとき，次の集合の要素の個数を求めよ。

(1) A　　(2) C　　(3) $A\cap B$

(4) $A\cap\overline{B}$　　(5) $\overline{B\cup C}$　　(6) $\overline{A}\cap\overline{B}$



第2章 式の計算

1節・整式とその加法・減法
2節・整式の乗法
3節・整式の因数分解
4節・整式の除法と分数式
5節・指数の拡張

古代の数学は実用的かつ技術的なものが中心であったため，商業，生産，あるいは暦の計算にかかわる算術と，天文，測量，あるいは建築にかかわる幾何学が主流であった。今日行われるような式の計算が定着するまでには，多くの人間の努力を必要とした。

とくに，式の計算に都合のよい表記法については，長い間の工夫がみられる。＋と－の記号は1489年に出版されたウィドマンの『実用数学』によってはじめて使われた。また，ヴィエタは，1591年に出版した本の中で A^2 や A^3 などを表す略記法を用いて，式の表記法の基礎を作った。

数学を学ぶ目的の１つは論理的思考力を高めることであるが，そのためにも，計算力を十分身につけて，思考の流れが中断しないように心がけよう。

〖1節〗整式とその加法・減法

1 整　式

数や文字，数といくつかの文字の積で表される式，たとえば

$$3,\quad a,\quad 2x,\quad -5ax,\quad bx^2y$$

などをそれぞれ **単項式** という。単項式では，掛け合わせた文字の個数をその単項式の **次数** といい，文字以外の部分を **係数** という。

とくに，3のように，文字を含まない式の次数は0である。

例1 〉 ① 単項式 $-5ax$ の次数は2，係数は -5 である。

② 単項式 bx^2y の次数は4，係数は1である。

問1 〉 次の単項式の次数と係数をいえ。

(1) $3by$　　(2) $-cb^2$　　(3) z　　(4) $\frac{1}{2}x^2y^2z^2$

2つ以上の単項式の和で表される式，たとえば

$$3x+4,\quad 2x^2-3x-5,\quad x^2y^2-2xy^2+3y$$

などをそれぞれ **多項式** という。多項式では，式に含まれる1つ1つの単項式を **項** という。単項式と多項式を合わせて **整式** という。

注意 〉 $2x^2-3x+5$ などを $2x^2+(-3)x+5$ のように書くこともある。

整式の中にあらわれる各項の次数のうち，最も次数の高いものを，その整式の **次数** という。また，整式 $3x+4$ の中の4のように，文字を含まない項を **定数項** という。

整式の次数が n であるとき，その整式を ***n* 次式** という。

例2 〉 ① 整式 $2x^2-3x-5$ の次数は2，したがって，この整式は2次式で，定数項は -5 である。

② 整式 $x^2y^2-2xy^2+3y$ の次数は4，したがって，この整式

は4次式で，定数項はない。

問2 次の整式の次数と定数項をいえ。また，各項の係数もいえ。

(1) $6a - b$　　(2) $5x^2 + 4x - 2$　　(3) $-ab^2 + 2ab + 4$

2つ以上の文字を含む整式について，1つの文字に着目してその文字についての整式と考え，他の文字は係数として扱うことがある。

例3 ① $-bx^2y^3$ は，x については2次式で，係数は $-by^3$，y については3次式で，係数は $-bx^2$ である。

② $ax^2 + bx + c$ は，x について2次式で，x^2 の係数は a，x の係数は b，定数項は c である。

③ $x^3y - x^2 + xy^2$ は，4次式であるが，x については3次式，y については2次式である。

問3 次の整式を x についての整式として扱い，その次数と定数項，および，各項の係数をいえ。

(1) $4axy - 5by$　　(2) $\dfrac{x^2}{a} - \dfrac{y^2}{b}$　　(3) $-kx^2 + 2xy - y^2 + 3$

a と $4a$，$2xy^2$ と $-xy^2$ のように，文字の部分が同じである項を**同類項**という。たとえば，整式

$$2x^2y - 5x^2y + 3xy - xy$$

では，同類項をまとめて

$$\begin{aligned} 2x^2y - 5x^2y + 3xy - xy &= (2 - 5)x^2y + (3 - 1)xy \\ &= -3x^2y + 2xy \end{aligned}$$

とすることができる。このように，1つの整式の中で同類項をまとめて簡単にすることを，整式を**整理**するという。

また，1つの文字について整式を整理するとき，着目した文字の次数の高い項から順に並べることを**降べきの順**に整理するという。

例題1 次の整式を x について降べきの順に整理せよ。

$$x^2 - 5xy - 4x^2 + 2y^2 - 4xy$$

解

$$\begin{aligned} & x^2 - 5xy - 4x^2 + 2y^2 - 4xy \\ &= (1-4)x^2 - (5+4)yx + 2y^2 \\ &= -3x^2 - 9yx + 2y^2 \end{aligned}$$

問4 次の整式を x について降べきの順に整理せよ。

(1) $-5 + 2x - x^2 + 3x$

(2) $2x^2 - 3 + 4x^3 - x^2 + 5x - 2x^3$

(3) $3x^2y + y^2 - 2x^2y + 4xy + x^2y - y^2$

2 加法と減法

2つ以上の整式の加法と減法は，同類項をまとめて計算する。

例題2 2つの整式

$$A = 3x^3 - 4x^2 + 5, \quad B = 3 - 4x + 5x^2$$

について，$A + B$ および $A - B$ を求めよ。

解

$$\begin{aligned} A + B &= 3x^3 - 4x^2 + 5 + 3 - 4x + 5x^2 \\ &= 3x^3 + (-4+5)x^2 - 4x + (5+3) \\ &= 3x^3 + x^2 - 4x + 8 \\ A - B &= 3x^3 - 4x^2 + 5 - (3 - 4x + 5x^2) \\ &= 3x^3 + (-4-5)x^2 + 4x + (5-3) \\ &= 3x^3 - 9x^2 + 4x + 2 \end{aligned}$$

例題2は，降べきの順に整理して，次のように計算してもよい。

$$\begin{array}{rr} & 3x^3 - 4x^2 \quad + 5 \\ +) & \quad 5x^2 - 4x + 3 \\ \hline & 3x^3 + x^2 - 4x + 8 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 3x^3 - 4x^2 \quad + 5 \\ -) & \quad 5x^2 - 4x + 3 \\ \hline & 3x^3 - 9x^2 + 4x + 2 \end{array}$$

問5 次のそれぞれの整式 A, B について，$A+B$ および $A-B$ を求めよ。

(1) $A=3a^2+2a-1$, $B=-2a^2+4a+5$

(2) $A=2x^3-3x^2+5x+1$, $B=-3x^2+4x^3+2$

(3) $A=3a^2-5ab-2b^2$, $B=2a^2+7ab-b^2$

練習問題

1. 次の式は何次式か。また，x または y については何次式か。

(1) $5x^3y^2z$　　(2) $a-x^2+x^4$

(3) $x^3-2x^2y^2+3x^2y+y^2$　　(4) $axy^3-y^2+x-bxy$

2. 次の整式を x について降べきの順に整理せよ。

(1) $x^3-7x^2+3x+5x^2-x+4-2x^3$

(2) $5x^2-3y^2+4xy+2x^2-3xy-y^2$

(3) $4x^3-2x^2y+5x^3-3xy+3x^2y+2xy+4$

3. 整式 A, B, C を

$$A=a^2+3ab-4b^2+2$$
$$B=2a^2+6b^2-5$$
$$C=-2a^2+4ab-2b^2$$

とするとき，次の計算をせよ。

(1) $A+B+C$　　(2) $A-B-C$　　(3) $A+2B-C$

〖2節〗整式の乗法

1 指数法則

同じ文字を掛け合わせて得られる

$$a \times a = a^2, \quad a \times a \times a = a^3$$

などを a の**累乗**（るいじょう）という。a^2 を a の平方，a^3 を a の立方ともいう。

一般に，n が正の整数のとき，a を n 個掛け合わせて得られる累乗を a^n と書き，n を累乗の**指数**という。a^1 は a である。

例1 〉 $a^2 \times a^3 = (a \times a) \times (a \times a \times a) = a^5 = a^{2+3}$

$$(a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^6 = a^{2\times 3}$$

$$(ab)^3 = ab \times ab \times ab = a^3b^3$$

一般に，累乗の間の乗法には，次の指数法則が成り立つ。

指数法則

$a \neq 0$, $b \neq 0$ とし，m, n を正の整数とするとき

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

例2 〉 ① $(-3a^2b)^3 = (-3)^3 \cdot (a^2)^3 \cdot b^3$

$$= -27a^6b^3$$

② $a^3b^2(2ab^2)^3 = a^3b^2 \cdot 2^3a^3 \cdot b^6$

$$= 8a^{3+3}b^{2+6} = 8a^6b^8$$

問1 〉 次の計算をせよ。

(1) $5a \times 6a^3$　　(2) $(-2x^4y^2)^2$　　(3) $(4ab)^2(a^2b)^3$

2 乗　法

整式と整式の積は，分配法則とよばれる次の等式

$$A(B+C)=AB+AC$$

$$(B+C)A=BA+CA$$

を用いて，単項式の和の形にすることができる。これを整式の **展開** という。展開された整式は，降べきの順に整理するとよい。

例題1 $(x^3+2x-2)(3x-1)$ を展開せよ。

解 $(x^3+2x-2)(3x-1)$

$=(x^3+2x-2)\cdot 3x+(x^3+2x-2)\cdot(-1)$

$=3x^4+6x^2-6x-x^3-2x+2$

$=3x^4-x^3+6x^2-8x+2$

例題1は，次のように計算してもよい。

$$\begin{array}{rl} & x^3 \quad +2x \quad -2 \\ \times) & 3x \quad -1 \\ \hline & 3x^4 \quad +6x^2-6x \quad \cdots\cdots(x^3+2x-2)\cdot(3x) \\ & \quad -x^3 \quad -2x+2 \quad \cdots\cdots(x^3+2x-2)\cdot(-1) \\ \hline & 3x^4-x^3+6x^2-8x+2 \end{array}$$

問2 次の式を展開せよ。

(1) $(x^2-2x+1)(2x-3)$　　(2) $(x+5)(2x^2-x+1)$

問3 次の式を展開せよ。

(1) $(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

(2) $(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

3 乗法公式

整式を展開するとき，次のような公式が用いられる。

乗法公式 ①

I．$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

II．$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

III．$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

IV．$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$

例3 $(x-3y)(x+2y) = x^2 + (-3y+2y)x + (-3y)(2y)$

$= x^2 - xy - 6y^2$

問4 次の式を展開せよ。

(1) $(2x+3y)^2$　　(2) $(6a-5b)^2$

(3) $(3x+4y)(3x-4y)$　　(4) $(2b-3a)(3a+2b)$

例4 $(2x+3y)(4x-5y)$

$= 2\cdot 4\cdot x^2 + \{2\cdot(-5y) + 3y\cdot 4\}x + 3y\cdot(-5y)$

$= 8x^2 + 2xy - 15y^2$

問5 次の式を展開せよ。

(1) $(2x+3)(3x+5)$　　(2) $(-3x+2)(7x+5)$

(3) $(2a-5b)(3a+7b)$　　(4) $(-2a+7b)(3a-2b)$

例題2 $(x+y+z)^2$ を展開せよ。

解 $(x+y+z)^2 = \{(x+y)+z\}^2$

$= (x+y)^2 + 2(x+y)z + z^2$

$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2$

$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

問6 次の式を展開せよ。

(1) $(x+2y+3z)^2$　　(2) $(a+b-c)^2$

例題3 $(a+b)^3$ を展開せよ。

解 $(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)$

$=(a^2+2ab+b^2)a+(a^2+2ab+b^2)b$

$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

次の式の左辺を展開することにより，Vの公式が確かめられる。

乗法公式 ②

V. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

例5 $(2x-3y)^3=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot3y+3\cdot2x\cdot(3y)^2-(3y)^3$

$=8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$

問7 次の式を展開せよ。

(1) $(x+1)^3$　　(2) $(2x-y)^3$　　(3) $(3x+2y)^3$

次の式の左辺を展開することにより，VIの公式が確かめられる。

乗法公式 ③

VI. $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

例題4 $(2x+3)(4x^2-6x+9)$ を展開せよ。

解 $(2x+3)(4x^2-6x+9)$

$=(2x+3)\{(2x)^2-2x\cdot3+3^2\}$

$=(2x)^3+3^3$

$=8x^3+27$

問8 次の式を展開せよ。

(1) $(x+2)(x^2-2x+4)$　　(2) $(3a-2)(9a^2+6a+4)$

練習問題

1. 次の式を展開せよ。

(1) $(3a+5)(2a^2-3a+2)$　　(2) $(x^2+2x+4)(x-2)$

2. 次の式を展開せよ。

(1) $\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{4}\right)^2$　　(2) $\left\{-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right\}^2$

(3) $\left(\frac{1}{2}a^2+2b\right)\left(\frac{1}{2}a^2-2b\right)$　　(4) $(2xy-3)(5xy-4)$

(5) $(x^2-y^2)^3$　　(6) $(a^2+3)(a^4-3a^2+9)$

3. 次の計算をせよ。

(1) $2(a-2)^2-2(a-2)+3$

(2) $(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+1$

(3) $(a+b)^2+(a-b)^2$

(4) $(a+b)^2-(a-b)^2$

4. 次の式を展開せよ。

(1) $3(2x-3y)(4x+5y)$　　(2) $(a-b-2)(a-b-7)$

(3) $(a+b+c)(a+b-c)$　　(4) $(a-b+c)(a+b-c)$

(5) $(a+b)^2(a-b)^2$　　(6) $(x+1)(x-2)(x+3)$

(7) $(x-2)(x-4)(x+3)(x+5)$

〖3節〗 整式の因数分解

1 因数分解

整式 $x^2+7x+10$ は2つの整式 $x+2$ と $x+5$ の積で表される。このように,整式をいくつかの整式の積の形に表すことを**因数分解**という。このとき，$x+2$ と $x+5$ などを整式の**因数**という。

整式の中に共通な因数があるときには，それをかっこの外にくくり出すことによって因数分解できる。

例1 〉 ① $2x^2y-4xy^2=2xy(x-2y)$

② $(m-n)a+(n-m)b=(m-n)a-(m-n)b$

$=(m-n)(a-b)$

問1 〉 次の式を因数分解せよ。

(1) $3a^2b-5ab^2$　　(2) $4a^3b^2-2ab^3$

(3) $(a-b)c-2(b-a)$　　(4) $(3x-y)^2-3x+y$

(5) $a^2-ab+ac-bc$

因数分解は，整式の展開と逆の関係になる。

そこで，乗法公式の左辺と右辺を交換することにより，因数分解の公式が得られる。

因数分解の公式 ①

I. $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

II. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

III. $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

例2 ① $9x^2 + 12x + 4 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2$

$= (3x + 2)^2$

② $4x^2 - 20xy + 25y^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5y + (5y)^2$

$= (2x - 5y)^2$

③ $9x^2 - 16y^2 = (3x)^2 - (4y)^2 = (3x + 4y)(3x - 4y)$

④ $x^2 - 11xy + 28y^2$

$= x^2 + \{(-4y) + (-7y)\}x + (-4y) \cdot (-7y)$

$= (x - 4y)(x - 7y)$

問2 次の式を因数分解せよ。

(1) $a^2 + 4a + 4$　　(2) $x^2 - 10xy + 25y^2$

(3) $x^2 - 36$　　(4) $a^2 + 3ab + 2b^2$

乗法公式IVから，次の公式が得られる。

因数分解の公式 ②

IV.　$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$

例題1 $3x^2 - 5x - 2$ を因数分解せよ。

解 $3x^2 - 5x - 2$

$= (ax + b)(cx + d)$

とおくと

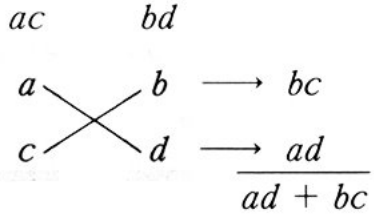
$ac = 3, \quad bd = -2,$

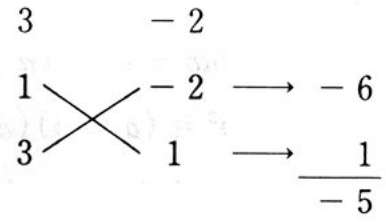
$ad + bc = -5$

右の図式から

$a = 1, \quad b = -2,$

$c = 3, \quad d = 1$





ゆえに　　$3x^2 - 5x - 2 = (x - 2)(3x + 1)$

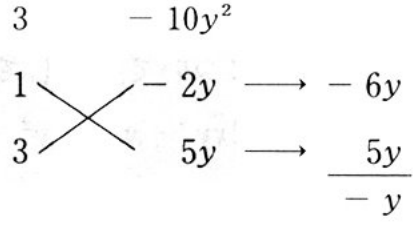
問3 次の式を因数分解せよ。

(1) $3x^2 + 4x + 1$　　(2) $6x^2 - 7x + 2$

(3) $6a^2 + a - 12$　　(4) $-9a^2 - 3a + 2$

例題2 $3x^2 - xy - 10y^2$ を因数分解せよ。

解 x についての2次式と考え，右の図式から



$$3x^2 - xy - 10y^2$$
$$= (x - 2y)(3x + 5y)$$

問4 次の式を因数分解せよ。

(1) $3x^2 + 5xy + 2y^2$　　(2) $4a^2 + 4ab - 3b^2$

(3) $2x^2 - 13xy + 15y^2$　　(4) $-12x^2 + 5xy + 3y^2$

乗法公式VIから，次の公式が得られる。

因数分解の公式 ③

V. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

例3 ① $8x^3 + 1 = (2x)^3 + 1^3$

$= (2x + 1)\{(2x)^2 - (2x)\cdot 1 + 1^2\}$

$= (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$

② $x^3 - 27y^3 = x^3 - (3y)^3 = (x - 3y)(x^2 + 3xy + 9y^2)$

③ $x^4 - x = x(x^3 - 1) = x(x - 1)(x^2 + x + 1)$

問5 次の式を因数分解せよ。

(1) $a^3 + 1$　　(2) $x^3 - 8$　　(3) $27a^3 - 64$

(4) $8x^3 - 27y^3$　　(5) $a^4 + 8a$

2 因数分解の工夫

いままで学んできた公式をもとにして，やや複雑な式のいろいろな因数分解を工夫してみよう。

例題3 $x^2 + 2xy - xz + y^2 - yz$ を因数分解せよ。

解 z について整理して

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy - xz + y^2 - yz &= -(x+y)z + x^2 + 2xy + y^2 \\ &= -(x+y)z + (x+y)^2 \\ &= (x+y)(x+y-z) \end{aligned}$$

問6 次の式を因数分解せよ。

(1) $ab - bc + ac - b^2$　　(2) $x^2 - 2x + xy + y - 3$

(3) $x^2y + x^2z + xy^2 - y^2z$

例題4 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2 - (y-z)^2$　　(2) $a^4 - b^4$

解 (1) $y - z = A$ とおくと

$$\begin{aligned} x^2 - (y-z)^2 &= x^2 - A^2 \\ &= (x+A)(x-A) \\ &= (x+y-z)(x-y+z) \end{aligned}$$

(2) $a^2 = A$, $b^2 = B$ とおくと

$$\begin{aligned} a^4 - b^4 &= A^2 - B^2 \\ &= (A-B)(A+B) \\ &= (a^2-b^2)(a^2+b^2) \\ &= (a+b)(a-b)(a^2+b^2) \end{aligned}$$

問7 次の式を因数分解せよ。

(1) $(x-2)^2 - (y+2)^2$　　(2) $(x-a)^2 - 4(x-a) + 4$

(3) $a^4 - 16$　　(4) $x^4 - 5x^2 + 4$

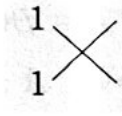
例題5　$x^2 - 6xy + 5y^2 - 3x + 7y + 2$ を因数分解せよ。

解　$x^2 - 6xy + 5y^2 - 3x + 7y + 2$

$= x^2 - (6y + 3)x + 5y^2 + 7y + 2$

$= x^2 - (6y + 3)x + (5y + 2)(y + 1)$

ここで右の図式の



$-(5y+2) \longrightarrow -(5y+2)$

$-(y+1) \longrightarrow -(y+1)$

$-(6y+3)$

ように考えて

$x^2 - (6y + 3)x + (5y + 2)(y + 1)$

$= (x - 5y - 2)(x - y - 1)$

問8　次の式を因数分解せよ。

(1)　$x^2 + 3xy + (2y + 1)(y - 1)$

(2)　$x^2 - 2xy + y^2 + x - y - 2$

注意　因数分解は，ふつう，整式の因数の係数が有理数の範囲で行う。

ところが，整式 x^2-2 は，因数の係数が有理数の範囲では因数分解できない。しかし，因数の係数を実数の範囲とすると

$$x^2 - 2 = x^2 - (\sqrt{2})^2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$$

のように因数分解できる。

練習問題

1.　次の式を因数分解せよ。

(1)　$2a^2 - 18b^2$　　(2)　$6x + y - 2xy - 3$

(3)　$acx - bd + adx - bc$　　(4)　$2x^3 + x^2 - 2x - 1$

2.　次の式を因数分解せよ。

(1)　$a^2 - 4ab + 4b^2 - 1$　　(2)　$4x^2 + 20xy + 9y^2$

(3)　$(x^2 - 2)^2 - x^2$

3.　次の式を因数分解せよ。

(1)　$x^2 + xy - 5x - y + 4$　　(2)　$2x^2 - xy - y^2 - 7x + y + 6$

〖4節〗整式の除法と分数式

1 整式の商と余り

2つの整式 A, B に対して，$A = BQ$ となるような整式 Q があるとき，A は B で割りきれるといい，$A \div B = Q$ と表す。このとき，整式 Q を，A を B で割った**商**という。

たとえば，$2x^2 + 9x - 5$ を $2x - 1$ で割った商は $x + 5$ である。$2x^2 + 9x - 5$ を $2x - 1$ で割るには，整数の除法と同じような方法で，次のように計算することもできる。

$$
\begin{array}{rl}
 & x + 5 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{商} \\
2x - 1 \overline{)\ 2x^2 + 9x - 5} & \\
 & \underline{2x^2 - x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2x - 1) \cdot x \\
 & 10x - 5 \\
 & \underline{10x - 5} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2x - 1) \cdot 5 \\
 & 0
\end{array}
$$

このような計算では，割る式も割られる式も降べきの順に整理してから行う。

例題1 $(x^3 + 6x^2 - 32) \div (x + 4)$ を計算して商を求めよ。

解

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2 + 2x - 8 \\
x + 4 \overline{)\ x^3 + 6x^2 \quad - 32} & \\
 & \underline{x^3 + 4x^2} \\
 & 2x^2 \\
 & \underline{2x^2 + 8x} \\
 & -8x - 32 \\
 & \underline{-8x - 32} \\
 & 0
\end{array}
$$

ゆえに，商は　$x^2 + 2x - 8$

問1 次の計算をして商を求めよ。

(1) $(x^3 + 3x^2 - 20) \div (x - 2)$

(2) $(5x^3 + 9x^2 - 22x + 4) \div (-4 + 2x + x^2)$

次に，$(2x^3 + 7x^2 - 3x - 9) \div (x^2 + 2x - 5)$ を計算してみよう。

$$
\begin{array}{r}
2x\ +3 \\
\hline
x^2+2x-5\ \big)\ 2x^3+7x^2-\ 3x-\ 9 \\
\underline{\ 2x^3+4x^2-10x\ \ \ \ \ } \\
3x^2+\ 7x-\ 9 \\
\underline{\ 3x^2+\ 6x-15\ } \\
x+\ 6
\end{array}
$$

ここで，$x + 6$ の次数は割る整式 $x^2 + 2x - 5$ の次数より低いから，同じような計算をつづけることはできない。与えられた整式を

$$A = 2x^3 + 7x^2 - 3x - 9$$

$$B = x^2 + 2x - 5$$

とおくと，上の計算から

$$A = B(2x + 3) + (x + 6)$$

と表される。このときも，$2x + 3$ を A を B で割った**商**といい，また $x + 6$ を**余り**という。余りの次数は，割る整式 B の次数より低くなる。

一般に，整式 A を整式 B で割った商を Q，余りを R とすると

$$\boldsymbol{A = BQ + R}$$

$$(R \text{ の次数}) < (B \text{ の次数})$$

が成り立つ。とくに，$R = 0$ のとき，A は B で割りきれる。

問2 次の計算をして，商と余りを求めよ。

(1) $(3x^3 - 4x^2 + 2x + 7) \div (3x + 2)$

(2) $(2x^3 + x - 4) \div (2x^2 + x + 1)$

2 整式の約数と倍数

整式 A が整式 B で割り切れるとき，すなわち $A=BQ$ となる整式 Q があるとき，B を A の **約数** といい，A を B の **倍数** という。なお，因数は約数である。

たとえば，36ページの例題1からわかるように，

$$A = x^3 + 6x^2 - 32$$

を $x+4$ で割ると，整式 A は割り切れて，商は x^2+2x-8 となる。

したがって，$x+4$ は A の約数であり，A は $x+4$ の倍数である。

また，A は x^2+2x-8 で割り切れるから，x^2+2x-8 も A の約数である。

〈注意〉 約数，倍数を求めるには，因数分解を利用するとよい。

2つ以上の整式があるとき，それらすべてに共通な約数を **公約数** という。公約数のうち，次数の最も高い整式を **最大公約数** という。

また，2つ以上の整式で，それらすべてに共通な倍数を **公倍数** という。公倍数のうち，次数の最も低い整式を **最小公倍数** という。

例1 〉 x^3-x^2 と x^3-x の最大公約数と最小公倍数を求めてみよう。

2つの整式をそれぞれ因数分解すると

$$x^3 - x^2 = x^2(x-1)$$

$$x^3 - x = x(x+1)(x-1)$$

したがって，最大公約数は　$x(x-1)$

最小公倍数は　$x^2(x+1)(x-1)$

問3 〉 次の各組の整式の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(1) a^3b^5c，ab^3　　(2) x^2-2x+1，x^2+x-2

(3) x^2-9，x^3-x^2-6x

2つの整式 A, B が，次数が1以上の整式を公約数にもたないとき，整式 A と B とは **たがいに素** であるという。このときの最小公倍数は，A と B との積 AB である。

例2 〉 整式 $(x+2)(x-2)$ と整式 $x(x+1)$ は次数が1以上の整式を公約数にもたないから，たがいに素である。

したがって，最小公倍数は　　$x(x+1)(x+2)(x-2)$

2つの整式 A, B は，それらの最大公約数を G とすると，たがいに素である約数 A', B' によって，$A = A'G, B = B'G$ と書ける。また，A と B の最小公倍数を L とすると，$L = A'B'G$ と書ける。

したがって，$AB = GL$ が成り立つ。

上の $L = A'B'G$ を用いると，最大公約数が $x-1$，最小公倍数が $x(x-1)(3x+2)$ である同じ次数の2つの整式は，$A'B' = x(3x+2)$ となるから，$x(x-1)$ と $(x-1)(3x+2)$ である。

例題2 〉 次の3つの整式の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

$$x^3 - 4x,\quad x^2 - 4x + 4,\quad x^3 - 2x^2$$

解 〉 3つの整式をそれぞれ因数分解すると

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x+2)(x-2)$$

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

$$x^3 - 2x^2 = x^2(x-2)$$

したがって，最大公約数は　　$x-2$

最小公倍数は　　$x^2(x+2)(x-2)^2$

問4 〉 次の各組の整式の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(1) $ab^3c^2,\quad ab^4c^3,\quad a^2bc$

(2) $x^3(x+1)(x-1)^3,\quad x(x+1)^3(x-1)^2,$
$x^2(x+1)^2(x-1)$

(3) $4x^2 - 1,\quad 2x^3 + x^2,\quad 4x^2 + 4x + 1$

3 分数式

A が整式で，B が1次以上の整式のとき，$\dfrac{A}{B}$ の形で表される式を分数式といい，A をその **分子**，B をその **分母** という。整数と分数を合わせて有理数というように，整式と分数式を合わせて **有理式** という。

分数式では，分数の場合と同じように，C を0でない整式とすると

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A}{B},\quad \frac{A\div C}{B\div C}=\frac{A}{B}$$

が成り立つ。したがって，分数式の分母と分子に共通の約数があれば，その約数で割って，分数式を簡単にすることができる。このことを，分数式を **約分** するという。

次の分数式は以下のように約分できる。

例3 ① $\dfrac{10a^2bc}{5ab^2c}=\dfrac{2a}{b}$

② $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+3}=\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{x-2}{x-1}$

③ $\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-1}=\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x^2+x+1)}=\dfrac{x-1}{x^2+x+1}$

$\dfrac{x-2}{x-1}$ のように，分母と分子がたがいに素である分数式は，これ以上約分できない。このような分数式を **既約分数式** という。分数式の分母と分子を最大公約数で約分すれば，分数式は既約分数式になる。

問5 次の分数式を既約分数式になおせ。

(1) $\dfrac{9xy^4}{12x^3y}$　　(2) $\dfrac{8xy^3z^2}{6x^3y^2z}$

(3) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4}$　　(4) $\dfrac{x^2-4x-21}{2x^2+4x-6}$

(5) $\dfrac{a^3+1}{a^2+2a+1}$　　(6) $\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$

2つ以上の分数式の分母を同じにすることを**通分**するという。通分するには，おのおのの分数式の分母の最小公倍数を共通な分母となるようにすればよい。たとえば，分数式 $\frac{x+2}{x^2+x}$ と $\frac{3}{x^2-x-2}$ は，分母を $x(x+1)(x-2)$ とすることにより，次のように通分することができる。

$$\frac{x+2}{x^2+x}=\frac{x+2}{x(x+1)}=\frac{(x+2)(x-2)}{x(x+1)(x-2)}$$

$$\frac{3}{x^2-x-2}=\frac{3}{(x+1)(x-2)}=\frac{3x}{x(x+1)(x-2)}$$

問6 次の分数式を通分せよ。

(1) $\frac{1}{x^2-xy}$，$\frac{1}{y^2-xy}$　　(2) $\frac{x-2}{x^2-1}$，$\frac{x+1}{x^2-3x+2}$

4 分数式の加法と減法

分母が同じ分数式の加法と減法は，次のようにする。

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{B}=\frac{A+C}{B},\quad \frac{A}{B}-\frac{C}{B}=\frac{A-C}{B}$$

分母が異なるときは，通分してから計算する。

例題3 $\frac{2x-3}{x^2-3x+2}-\frac{3x-2}{x^2-4}$ を計算せよ。

解

$$\frac{2x-3}{x^2-3x+2}-\frac{3x-2}{x^2-4}$$

$$=\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}-\frac{3x-2}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{(2x-3)(x+2)}{(x-1)(x-2)(x+2)}-\frac{(x-1)(3x-2)}{(x-1)(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{(2x-3)(x+2)-(x-1)(3x-2)}{(x-1)(x-2)(x+2)}=\frac{-x^2+6x-8}{(x-1)(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{-(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-2)(x+2)}=-\frac{x-4}{(x-1)(x+2)}$$

問7 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{2x+1}{x+1}+\dfrac{x+2}{x+1}$　　(2) $\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}$

(3) $\dfrac{3}{x^2-x-2}-\dfrac{2}{x^2-1}$　　(4) $\dfrac{x-4}{x^2-x}+\dfrac{x+8}{x^2+x-2}$

5 分数式の乗法と除法

分数式の乗法と除法は，次のようにする。

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD},\quad \frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$$

例題4 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{x+1}{2(3x-1)}\times\dfrac{5(3x-1)^2}{(x+1)^3}$　　(2) $\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}\div\dfrac{x+1}{x^2-x}$

解 (1) $\dfrac{x+1}{2(3x-1)}\times\dfrac{5(3x-1)^2}{(x+1)^3}=\dfrac{5(x+1)(3x-1)^2}{2(3x-1)(x+1)^3}$

$=\dfrac{5(3x-1)}{2(x+1)^2}$

(2) $\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}\div\dfrac{x+1}{x^2-x}=\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}\times\dfrac{x^2-x}{x+1}$

$=\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}\times\dfrac{x(x-1)}{x+1}=x$

問8 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{2x}{3y^2}\div\dfrac{8x^2}{6yz}$　　(2) $\dfrac{x-1}{2x}\div\dfrac{2x-2}{3x-1}$

(3) $\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}\times\dfrac{x+2}{x^2+4x-5}$

(4) $\dfrac{4a^2-1}{a^2-4a-5}\div\dfrac{2a^2+9a-5}{a^2-25}$

練習問題

1. 次の計算をして商と余りを求めよ。

(1) $(6x^4 + x^3 - 10x^2 + 7x + 13) \div (2x + 3)$

(2) $(x^3 + 8x + 7) \div (x^2 + 6x)$

(3) $(2x^3 - 3x^2 - x + 4) \div (x^2 + 2x - 5)$

(4) $(5x^4 + 3x^3 - 16x) \div (x^2 + 2)$

2. 整式 A を $x^2 - 2$ で割ると，商が $x + 2$ で余りは $x + 5$ であるという。整式 A を求めよ。

3. 次の3つの整式の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

$$(a + b)^2 - c^2,\quad (b + c)^2 - a^2,\quad (c + a)^2 - b^2$$

4. 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{x}{x - 2} - \dfrac{x}{x + 2} + \dfrac{2x^2}{x^2 - 4}$

(2) $\dfrac{1}{x + 1} - \dfrac{1}{x + 2} - \left(\dfrac{1}{x + 3} - \dfrac{1}{x + 4}\right)$

(3) $\dfrac{2x^2 - 15x + 25}{x^2 - 7x + 10} - \dfrac{2x - 1}{x - 2}$

5. 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{(-xy)^2}{z^3} \times \dfrac{3z^2}{x^2y} \div \dfrac{6xy}{(-yz)^3}$

(2) $\dfrac{x - 1}{2x - 1} \div \dfrac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 + x - 1} \div \dfrac{x^2 - x}{x + 1}$

(3) $\dfrac{x^2 - (y - z)^2}{x^4 - y^4} \times \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - xy + xz} \div \dfrac{1}{x + y}$

(4) $\left(1 + \dfrac{b}{a}\right) \div \left(1 + \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}\right)$

〖5節〗指数の拡張

$a \neq 0$, $b \neq 0$ とし，m, n を正の整数とするとき

指数法則　$a^m a^n = a^{m+n}$,　$(a^m)^n = a^{mn}$,　$(ab)^n = a^n b^n$

が成り立つことはすでに学んだ。

ここで，さらに a の累乗の間の除法について考えてみよう。

$m > n$ ならば，　$a^m \div a^n = a^{m-n}$

$m = n$ ならば，　$a^m \div a^n = 1$

$m < n$ ならば，　$a^m \div a^n = \dfrac{1}{a^{n-m}}$

となって，a の累乗の間の除法には，指数の減法があらわれる。そこで，0 や負の整数を指数にもつ数を考えて，次のように定める。

$a \neq 0$ とし，m を正の整数とするとき

$$\boldsymbol{a^0 = 1,\quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$$

たとえば，$a^{-2} = \dfrac{1}{a^2}$，$a^{-5} = \dfrac{1}{a^5}$ であり，a が 0 でないどんな数であっても，a^0 は 1 である。このように定めると，任意の正の整数 m, n について，$a^m \div a^n$ は次のように，1 つにまとめて表せる。

$$a^m \div a^n = a^m \times a^{-n} = a^{m-n}$$

例題 1　$a \neq 0$ とし，$m = 3$, $n = -2$ のとき

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

が成り立つことを確かめよ。

証明　$a^m \times a^n = a^3 \times a^{-2} = a^3 \times \dfrac{1}{a^2} = a$

$a^{m+n} = a^{3+(-2)} = a$

ゆえに　　左辺 = 右辺

例題1のようにして，$a^m a^n = a^{m+n}$ は，m, n が正の整数のときだけでなく，任意の整数として成り立つことが確かめられる。

問1 次の式の値を求めよ。

(1) $2 \times (-4)^{-2}$　(2) $3^2 \times 3^{-3}$　(3) $2^{-3} \times 3^2$

(4) $2^0 \times 3^{-1}$　(5) $3^{-2} \times 5^{-3}$　(6) $9 \times 3 \times (9 \times 3)^{-2}$

問2 次の計算をせよ。ただし，$a \neq 0$ とする。

(1) $a^{-6} \times a^2$　(2) $a^{-5} \times a^5$　(3) $a^{-7} \div a^{-5}$

(4) $a^{-3} \div a^{-3}$　(5) $a^0 \div a^{-3}$　(6) $(a^{-5})^{-3}$

例題2 $a \neq 0, b \neq 0$ とし，$m = 3, n = -2$ のとき

(1) $(a^m)^n = a^{mn}$　(2) $(ab)^n = a^n b^n$

が成り立つことを確かめよ。

証明 (1) $(a^m)^n = (a^3)^{-2} = \dfrac{1}{(a^3)^2} = \dfrac{1}{a^6}$

$$a^{mn} = a^{3\times(-2)} = a^{-6} = \frac{1}{a^6}$$

ゆえに　$(a^m)^n = a^{mn}$

(2) $(ab)^n = (ab)^{-2} = \dfrac{1}{(ab)^2} = \dfrac{1}{a^2 b^2}$

$$a^n b^n = a^{-2} b^{-2} = \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{b^2} = \frac{1}{a^2 b^2}$$

ゆえに　$(ab)^n = a^n b^n$

問3 $m = -3, n = -4$ のとき，例題2の(1)，(2)が成り立つことを確かめよ。

問4 $m = -3, n = 0$ のとき，例題2の(1)，(2)が成り立つことを確かめよ。

このようにして，指数法則は m, n がどんな整数であっても成り立つことが確かめられる。これまで学んだ指数法則をまとめると，次の

ようになる。

一般の指数法則

$a \neq 0,\ b \neq 0$ とし，$m,\ n$ を任意の整数とするとき

$$a^m a^n = a^{m+n}$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$
$$(ab)^n = a^n b^n$$

非常に大きな数，あるいは，非常に小さな数を表すとき，指数を用いることが多い。たとえば，次のように表すと，数の大小の比較や計算が簡単になる。

$$149000000 = 1.49 \times 10^8$$
$$0.0000033 = 3.3 \times 10^{-6}$$

問5 次の数を 2.34 と 10 の累乗の積で表せ。

(1)　23400000　　(2)　0.00000234

練習問題

1. 次の計算をし，結果を指数を用いて表せ。

(1)　$(-2)^4 \times (-2)^{-2} \times (-2)^3$　　(2)　$(3^2)^{-2} \times (5^0)^{-2}$

(3)　$10^{-3} \div 10^{-5}$　　(4)　$4^{-3} \div 4^2 \times 4^3$

2. $1.47 \times 10^8 \div (3 \times 10^5)$ を計算せよ。

第2章の問題

A

1. 次の計算をせよ。

(1) $2x^2 - 5x - 6 - (x^3 - x + 1) - (2x^3 + 2x^2 - 7)$

(2) $\frac{2}{3}(x^2 - 3xy + y^2) - \frac{1}{2}(x^2 - 4xy - 3y^2)$

2. 次の計算をせよ。

(1) $(x + 2y)^3 - (x - 2y)^3$

(2) $(2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$

(3) $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$

3. 次の式を因数分解せよ。

(1) $a(a - b) - ac + bc$　　(2) $2mx^3 - 8mx^2 - 24mx$

(3) $2x^2 + (4a - 1)x - 2a$　　(4) $6x^2 - xy - 12y^2$

(5) $x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 3y + 2$　　(6) $a^3 + 8b^3 - 3ab(a + 2b)$

4. 次の各組の整式の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(1) $x^2 - 4$, $x^3 - 3x^2 - 10x$

(2) $a^2 - b^2$, $a^2 + ab - 2b^2$, $a^3 - b^3$

5. 整式 $2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 4x$ を x のある整式 A で割ったら，商 $2x^2 + 1$，余り $2x + 3$ であったという。整式 A を求めよ。

6. 次の計算をせよ。

(1) $\frac{2}{x - 2} + \frac{1}{x + 3} - \frac{3x + 4}{x^2 + 4x + 3}$

(2) $\frac{2x^2 - 5x - 3}{3x^2 - 4x + 1} \div \frac{2x^2 - 9x + 9}{12x^2 + 11x + 2} \times \frac{2x^2 - 5x + 3}{8x^2 + 6x + 1}$

7. 次の計算をし，結果を指数を用いて表せ。

(1) $100000 \div 0.0001 \times 10^{-10}$

(2) $2.73 \times 10^{-24} \div (9.1 \times 10^{-28})$

B

1. 次の計算をせよ。

(1) $(a+b+c)(a+b-c)+(a-b+c)(-a+b+c)$

(2) $(x+3)(x-3)(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$

2. 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^4-14x^2y^2+45y^4$

(2) $(x^2+3x)(x^2+3x+5)+6$

(3) $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

(4) $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

3. 最大公約数が $2x+1$，最小公倍数が $2x^3+11x^2+17x+6$ である2つの整式を求めよ。

4. 次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x+3}{x+2}$

(2) $\dfrac{x^2+2xy+y^2-1}{xy-y^2+y}\div\dfrac{x^2+xy-x}{x^2-2xy+y^2-1}\times\dfrac{x}{x^2-y^2-2x+1}$

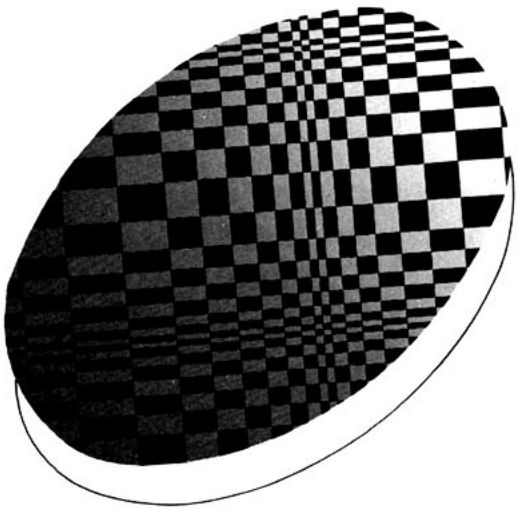
(3) $\left(\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}\right)\div\left(1+\dfrac{2xy}{x^2-2xy+y^2}\right)$

(4) $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

5. $\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{1}{x+a+b}=\dfrac{b}{(x+a)(x+a+b)}$ となることを用いて，次の式を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}+\dfrac{1}{(x+3)(x+4)}$

(2) $\dfrac{1}{x(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+4)}+\dfrac{1}{(x+4)(x+6)}+\dfrac{1}{(x+6)(x+8)}$



第3章 方程式と不等式

1節・2次方程式とその解
2節・複素数
3節・2次方程式の解の公式と判別式
4節・2次方程式の解と係数の関係
5節・連立方程式
6節・因数定理と高次方程式
7節・不等式

2次方程式に対応する数学の問題はバビロニアや古代エジプトにみられる。その解法は，数によって，あるいは図形によってであるが，いずれも正の解を求めるのみであった。0の概念の発見とともに，2次方程式の負の解を認めたことは，インドの数学に帰せられる。

3次方程式と4次方程式の解法は16世紀の中葉に発見された。このとき，カルダノによって，この章で学ぶ複素数の概念がおぼろげに導入された。19世紀はじめに，ガウスは，複素数の概念を確立するとともに，代数方程式は複素数の範囲で必ず解をもつことを明らかにした。

一方，1826年に20代前半の数学者アーベルが5次以上の方程式は，一般に，代数的に解けないことを証明し，人々に感銘を与えた。

〖1節〗 2次方程式とその解

x についての方程式が，(x の2次式) $= 0$ の形で表されるとき，その方程式を x についての **2次方程式** という。

2次方程式は，a, b, c を定数，$a \neq 0$ として，一般に

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

の形で表される。方程式を満たす x の値を，その方程式の **解**（かい）または根（こん）といい，方程式の解をすべて求めることを，**方程式を解く** という。

たとえば，2次方程式

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

は，左辺を因数分解すると

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

となる。したがって

$$x - 1 = 0 \quad \text{または} \quad x - 3 = 0$$

ゆえに，この方程式の解は $x = 1, x = 3$ である。これを

$$x = 1,\ \ 3$$

と書く。

問1 》 次の2次方程式の解を求めよ。

(1) $(x + 1)(x + 3) = 0$　　(2) $2x^2 - x - 3 = 0$

(3) $x^2 + 2x + 1 = 0$　　(4) $3x^2 - x - 10 = 0$

ところで，2次方程式

$$2x^2 + 6x + 1 = 0$$

は，簡単には因数分解できない。しかし，次のようにすることにより解を求めることができる。

両辺を2で割り，定数項を移項すると

$$x^2+3x=-\frac{1}{2}\quad \text{すなわち}\quad x^2+2\cdot\frac{3}{2}x=-\frac{1}{2}$$

両辺に $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ を加えて

$$x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9-2}{4}=\frac{7}{4}$$

よって　　$x+\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\frac{7}{4}}=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$

したがって　　$x=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2}$

ゆえに，この方程式の解は　　$x=\frac{-3+\sqrt{7}}{2},\ \frac{-3-\sqrt{7}}{2}$

問2 》 次の2次方程式を解け。

(1)　$5x^2-8x+1=0$　　(2)　$3x^2+4x+1=0$

同様にして，2次方程式

$$x^2-2x+3=0$$

を解くことを考えてみよう。

定数項を移項すると

$$x^2-2x=-3$$

両辺に1を加えて

$$x^2-2x+1=-2$$

よって　　$(x-1)^2=-2$

しかし，どのような実数 x についても，$(x-1)^2\geqq 0$ である。したがって，この方程式は実数の範囲では解をもたない。

〖2節〗 複素数

1 実数から複素数への数の拡張

前節で述べたように，2次方程式

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

は，実数の範囲では解をもたない。そこで，数の範囲を拡張することによって，すべての2次方程式が解をもつようにすることを考える。

平方して -1 となるような数，すなわち

$$x^2 = -1$$

を満たす数 x は，実数の範囲では存在しない。そこで，平方して -1 となる1つの新しい数を考え，これを i という文字で表す。すなわち

$$\boldsymbol{i^2 = -1}$$

と定める。この新しい数 i を **虚数単位** という。

a, b を実数として，虚数単位 i を用いて

$$\boldsymbol{a + bi}$$

の形で表される数を考える。このような数を **複素数** という。

複素数 $a + bi$ で，$b = 0$ であるものは実数 a と同じものであると考える。とくに，$b \neq 0$ であるものを **虚数** という。

複素数 ｛実数，虚数｝

たとえば

$$2 + 3i, \quad -2i, \quad -5 + \frac{2}{3}i, \quad \frac{1}{2} - \sqrt{3}\,i, \quad 4$$

は，いずれも複素数である。とくに，4以外の数はすべて虚数である。

複素数は，実数を含むより広い範囲の数であるといえる。

〈注意〉　この節では，文字 a, b, c, d は実数を表している。

2つの複素数 $a+bi$ と $c+di$ とが等しいことを

$$\boldsymbol{a+bi=c+di \iff a=c,\ b=d}$$

によって定める。とくに，次のことがいえる。

$$a+bi=0 \iff a=0,\ b=0$$

例題1 $(x+y)+(x-y)i=3+i$ を満たす実数 x, y を求めよ。

解 x, y は実数であるから，$x+y$, $x-y$ も実数である。

したがって，上の式が成り立つとき

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$$

両式より y を消去して　$x=2$　　よって　$y=1$

ゆえに　　$x=2,\ \ y=1$

問1 $(2x-y)+(x-2y)i=1+8i$ を満たす実数 x, y を求めよ。

複素数 $a-bi$ を $a+bi$ に**共役な複素数**という。たとえば，$3-5i$ に共役な複素数は $3+5i$ である。また，$3+5i$ に共役な複素数は $3-5i$ である。

2つの複素数 $a+bi$ と $a-bi$ とを**たがいに共役な複素数**という。たとえば，$3+5i$ と $3-5i$ とは，たがいに共役な複素数である。

問2 次の複素数に共役な複素数をいえ。

(1)　$2+i$　　(2)　$-\sqrt{3}\,i$　　(3)　5　　(4)　0

注意 複素数を α, β などの1つの文字で表すことがある。

2 複素数の四則計算

複素数の計算は，文字 i を含む有理式とみなして整理し，その中に i^2 があらわれたときには

$$i^2=-1$$

を用いて，式を簡単にするとよい。

加法・減法

例1 ① $(7-5i)+(3+2i)=(7+3)+(-5i+2i)$

$=10+(-5+2)i=10-3i$

② $(7-5i)-(3+2i)=(7-3)+(-5i-2i)$

$=4+(-5-2)i=4-7i$

問3 次の計算をせよ。

(1) $(-2+3i)+(6-3i)$　(2) $\sqrt{2}\,i+(-1+2i)$

(3) $-2i-(1+3i)$

乗法

例2 $(7-5i)(3+2i)=21+14i-15i-10i^2$

$=21+(14-15)i+10$

$=31-i$

問4 次の計算をせよ。

(1) $(-1+i)(3-2i)$　(2) $(2+3i)(2-3i)$

(3) i^3　(4) i^4

問5 複素数 $\alpha=a+bi$ に共役な複素数を β とするとき，$\alpha+\beta$ および $\alpha\beta$ は，それぞれ実数となることを示せ。

除法

例3 $\dfrac{7-5i}{3+2i}=\dfrac{(7-5i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\dfrac{21-14i-15i+10i^2}{3^2-(2i)^2}$

$=\dfrac{21-(14+15)i-10}{9-4i^2}=\dfrac{11-29i}{9+4}$

$=\dfrac{11}{13}-\dfrac{29}{13}i$

問6 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{1+i}{1-i}$　(2) $\dfrac{1}{3+4i}$　(3) $\dfrac{1}{i}$

複素数の間の加法，減法，乗法，除法は，次のように行われる。ただし，除法では $c+di \neq 0$ とする。

加法　$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

減法　$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

乗法　$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

除法　$\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

このように，実数の場合と同様に，複素数と複素数の和，差，積，商は複素数となって，複素数の四則計算は自由にできる。すなわち，複素数は，実数と同様に，四則演算について閉じている。

複素数の加法と乗法について，実数の場合と同様に交換法則，結合法則，および分配法則が成り立つ。

また，実数の場合と同様に，2つの複素数 α, β について

$$\alpha\beta=0 \text{ ならば，} \quad \alpha=0 \text{ または } \beta=0$$

が成り立つ。たとえば，このことを用いると，

$$(x+2i)(x-2i)=0$$

であれば，　$x+2i=0$　または　$x-2i=0$

が成り立つ。したがって，この方程式の解は

$$x=-2i,\ 2i$$

である。

3 負の実数の平方根

数の範囲を複素数にまで拡張することによって，一般に，負の実数の平方根を求めることができる。

a を正の実数として，負の実数 $-a$ の平方根とは

$$x^2 = -a$$

を満たす x のことである。たとえば，-3 の平方根は $x^2 = -3$ を満たす x のことである。つまり，2次方程式 $x^2 + 3 = 0$ の解である。

この方程式の左辺を変形すると

$$x^2 + 3 = x^2 - (-3) = x^2 - \{-(\sqrt{3})^2\} = x^2 - (\sqrt{3}\,i)^2$$

よって　　$(x + \sqrt{3}\,i)(x - \sqrt{3}\,i) = 0$

ゆえに　　$x + \sqrt{3}\,i = 0$　または　$x - \sqrt{3}\,i = 0$

したがって　　$x = \sqrt{3}\,i,\ -\sqrt{3}\,i$

すなわち，-3 の平方根は $\sqrt{3}\,i$ と $-\sqrt{3}\,i$ である。

一般に，$a > 0$ のとき，負の実数 $-a$ の平方根は

$$\sqrt{a}\,i \quad と \quad -\sqrt{a}\,i$$

である。負の実数 $-a$ の平方根のうち $\sqrt{a}\,i$ を $\sqrt{-a}$ と定める。つまり

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i,\quad -\sqrt{-a} = -\sqrt{a}\,i$$

である。たとえば，$\sqrt{-5} = \sqrt{5}\,i$，$-\sqrt{-5} = -\sqrt{5}\,i$ である。

以上のことをまとめると，次のようになる。

負の実数の平方根

a が正の実数のとき

(i)　$-a$ の平方根は，　$\sqrt{a}\,i$ と $-\sqrt{a}\,i$

(ii)　$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i$，　$-\sqrt{-a} = -\sqrt{a}\,i$

とくに，$\sqrt{-1} = i$，$-\sqrt{-1} = -i$ である。

問7 次の数を i を用いて表せ。

(1)　$\sqrt{-16}$　　(2)　$-\sqrt{-18}$　　(3)　$\sqrt{-\frac{3}{4}}$

例4 $x^2 + 7 = 0$ の解は，$x^2 = -7$ より

$$x = \sqrt{7}\,i,\ -\sqrt{7}\,i$$

問8 次の方程式の解を求めよ。

(1) $x^2 = -9$　　(2) $x^2 + 11 = 0$　　(3) $9x^2 + 5 = 0$

例5 ① $-\sqrt{-4} + \sqrt{-25} = -\sqrt{4}\,i + \sqrt{25}\,i = -2i + 5i$

$= 3i$

② $\sqrt{-3} \times \sqrt{-27} = \sqrt{3}\,i \times \sqrt{27}\,i = \sqrt{3} \times \sqrt{27}\,i^2$

$= \sqrt{3} \times 3\sqrt{3} \times (-1) = -3(\sqrt{3})^2$

$= -9$

問9 次の計算をせよ。

(1) $(\sqrt{-8})^2$　　(2) $\sqrt{-18} - \sqrt{-50}$

(3) $\sqrt{-9} - \sqrt{-27}$　　(4) $\sqrt{-3} \times \sqrt{-12}$　　(5) $\dfrac{\sqrt{-45}}{\sqrt{-3}}$

練習問題

1. 次の計算をせよ。

(1) $(1 - \sqrt{3}\,i)(\sqrt{3} + 4i)$　　(2) $(2 - \sqrt{-5})(2 + \sqrt{-5})^2$

(3) $\dfrac{6 - i}{1 + 7i}$　　(4) $\dfrac{2 + \sqrt{-7}}{2 - \sqrt{-7}}$

2. 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{1-i}{1+i} - \dfrac{1+i}{1-i}$　　(2) $\left(\dfrac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right)^2 + \dfrac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$

3. 等式 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$ は，$a > 0$, $b > 0$ のときには成り立つ。次の等式の左辺と右辺とを別々に計算して，成り立たないものの番号をいえ。

(1) $\sqrt{-2} \times \sqrt{7} = \sqrt{(-2)\cdot 7}$　　(2) $\sqrt{-2} \times \sqrt{-7} = \sqrt{(-2)\cdot(-7)}$

(3) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-3}} = \sqrt{\dfrac{8}{-3}}$　　(4) $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-3}} = \sqrt{\dfrac{-8}{-3}}$

4. $(3 - 2i)x - (1 + i)y = 14 - i$ を満たす実数 x, y を求めよ。

〖3節〗2次方程式の解の公式と判別式

1 解の公式

2次方程式の解の公式の求め方については中学校で学んだ。これを復習してみよう。

$3x^2+5x+1=0$ の解き方

両辺を3で割り，移項する。

$$x^2+\frac{5}{3}x=-\frac{1}{3}$$

すなわち

$$x^2+2\cdot\frac{5}{6}x=-\frac{1}{3}$$

両辺に $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ を加える。

$$x^2+2\cdot\frac{5}{6}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2=\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{1}{3}$$

$$\left(x+\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25-12}{36}$$

$$=\frac{13}{36}$$

$$x+\frac{5}{6}=\pm\sqrt{\frac{13}{36}}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{13}}{6}$$

$$x=-\frac{5}{6}\pm\frac{\sqrt{13}}{6}$$

$$=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6}$$

解は $x=\dfrac{-5+\sqrt{13}}{6},\ \dfrac{-5-\sqrt{13}}{6}$

$ax^2+bx+c=0$ の解き方

両辺を a で割り，移項する。

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

すなわち

$$x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x=-\frac{c}{a}$$

両辺に $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ を加える。

$$x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

解は $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

52ページの2次方程式 $x^2 - 2x + 3 = 0$ を解の公式を用いて解くと

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}\,i}{2} = 1 \pm \sqrt{2}\,i$$

となって，虚数の解が求められる。このように，虚数単位を用いると，2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は複素数の範囲で，つねに解が求められる。

2次方程式の解の公式

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

例題1 解の公式を用いて，次の方程式を解け。

(1) $2x^2 + 3x - 1 = 0$　　(2) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

(3) $x^2 + 3x + 4 = 0$

解 (1) 解の公式で，$a = 2,\ b = 3,\ c = -1$ とおいて

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

(2) 解の公式で，$a = 9,\ b = -12,\ c = 4$ とおいて

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4}}{2 \cdot 9} = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 9} = \frac{2}{3}$$

(3) 解の公式で，$a = 1,\ b = 3,\ c = 4$ とおいて

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{7}\,i}{2}$$

問1 解の公式を用いて，次の方程式を解け。

(1) $5x^2 - 5x + 1 = 0$　　(2) $4x^2 - 20x + 25 = 0$

(3) $x^2 - 3x + 5 = 0$　　(4) $3x^2 - 6x + 4 = 0$

(5) $6x^2 + x - 1 = 0$　　(6) $4x^2 - 8x + 5 = 0$

例題1の(3)は，2つの虚数である解をもつ。これを**虚数解**または虚根という。これに対して，例題1の(1)と(2)は，実数である解をもつ。これを**実数解**または実根という。

例題1の(2)は，2つの実数解が一致して1つの解となったものと考え，この解を**重複解**または重根という。

このように考えると，2次方程式は，複素数の範囲でつねに2つの解をもつ。

例題2 2次方程式 $ax^2 + 2b'x + c = 0$ について，その解が

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

となることを示せ。

解 解の公式で，$b = 2b'$ とおくと

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{(2b')^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

問2 例題2の解の求め方を用いて，次の2次方程式を解け。

(1) $x^2 - 4x - 2 = 0$　　(2) $x^2 + 2x + 2 = 0$

(3) $8x(3 - 2x) = 9$　　(4) $3x^2 - 4x + 4 = 0$

2 判別式

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

で与えられるから，解が，2つの異なる実数解であるか，重複解であるか，または2つの異なる虚数解であるかは，根号内の式 $b^2 - 4ac$ の値が正の数，0，負の数のいずれになるかによってきまる。

2次方程式の解を分類すると，次のようになる。

$\sqrt{b^2-4ac}$ が0でない実数　$\Longleftrightarrow$　2つの異なる実数解をもつ

$\sqrt{b^2-4ac}=0$　$\Longleftrightarrow$　重複解をもつ

$\sqrt{b^2-4ac}$ が虚数　$\Longleftrightarrow$　2つの異なる虚数解をもつ

b^2-4ac を D で表し

$$\boldsymbol{D=b^2-4ac}$$

を，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の **判別式** という。

2次方程式の解の分類を，判別式 $D=b^2-4ac$ を用いて書くと，次のようになる。

2次方程式の解の判別

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は次のように分類される。

$D=b^2-4ac>0 \Longleftrightarrow$ 2つの異なる実数解をもつ

$D=b^2-4ac=0 \Longleftrightarrow$ 重複解をもつ

$D=b^2-4ac<0 \Longleftrightarrow$ 2つの異なる虚数解をもつ

このように，2次方程式の解を分類することを **解を判別する** という。

例1 〉 ①　$x^2-8x+3=0$ の解を判別すると

$D=(-8)^2-4\cdot1\cdot3=52$　ゆえに，2つの異なる実数解

②　$x^2-2\sqrt{2}\,x+2=0$ の解を判別すると

$D=(-2\sqrt{2})^2-4\cdot1\cdot2=0$　ゆえに，重複解

③　$x^2-5x+7=0$ の解を判別すると

$D=(-5)^2-4\cdot1\cdot7=-3$ ゆえに，2つの異なる虚数解

問3 〉 次の2次方程式の解を判別せよ。

(1)　$6x^2+17x+12=0$　　(2)　$9x^2-42x+49=0$

(3)　$-x^2+x-1=0$　　(4)　$x(5-3x)=2$

例題3　2次方程式

$$x^2 - mx + 2m - 3 = 0$$

が重複解をもつように，定数 m の値を定めよ。また，そのときの解を求めよ。

解　与えられた2次方程式の判別式を D とする。

$$D = (-m)^2 - 4(2m - 3)$$
$$= m^2 - 8m + 12$$
$$= (m - 2)(m - 6)$$

重複解をもつのは，$D = 0$ の場合であるから，

$$m = 2 \text{ または } m = 6$$

が求める m の値である。

$m = 2$ のとき

$x^2 - 2x + 1 = 0$，$(x - 1)^2 = 0$　　解は　$x = 1$

$m = 6$ のとき

$x^2 - 6x + 9 = 0$，$(x - 3)^2 = 0$　　解は　$x = 3$

問4　2次方程式 $x^2 + mx + m - 1 = 0$ が重複解をもつように，定数 m の値を定めよ。また，そのときの解を求めよ。

練習問題

1.　次の2次方程式を解け。

(1)　$x^2 - 3x - 7 = 0$　　(2)　$2x^2 - 2\sqrt{6}x + 1 = 0$

(3)　$(x - 3)^2 = 4(x - 4)$　　(4)　$x(1 - x) = 3$

2.　次の2次方程式の解を判別せよ。

(1)　$x^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{3} = 0$　　(2)　$x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$

3.　2次方程式 $x^2 - (m - 3)x + m = 0$ が重複解をもつように，定数 m の値を定めよ。また，そのときの解を求めよ。

〖4節〗2次方程式の解と係数の関係

1 解と係数の関係

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解を

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

とおくと

$$\alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

となる。したがって，次のことが成り立つ。

2次方程式の解と係数の関係

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解を α, β とするとき

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

例1 〉 $2x^2 + 3x + 1 = 0$ の解を α，β とすると，これらの和と積は，解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -\frac{3}{2}, \quad \alpha\beta = \frac{1}{2}$$

問1 〉 次の方程式の解を α, β とするとき，それらの和と積を求めよ。

(1) $x^2 + 6x + 9 = 0$　　(2) $(x - 1)(2x + 3) + 1 = 0$

(3) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = 0$　　(4) $\sqrt{2}\,x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$

問2 〉 $3x^2 - 6x + 2 = 0$ の解を α, β とするとき，次の値を求めよ。

(1) $(\alpha - 1)(\beta - 1)$　　(2) $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}$　　(3) $\alpha^2 + \beta^2$

2 2次式の因数分解

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解を α, β とする。

解と係数の関係より

$$-\frac{b}{a} = \alpha + \beta, \quad \frac{c}{a} = \alpha\beta$$

したがって

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\} \\ &= a(x - \alpha)(x - \beta) \end{aligned}$$

2次式の因数分解

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解を α, β とするとき

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

例題1 〉 次の2次式を因数分解せよ。

(1) $3x^2 + 5x - 2$　　(2) $2x^2 + 4x - 5$　　(3) $x^2 + x + 2$

解 〉 (1) $3x^2 + 5x - 2 = 0$ の解は，解の公式より

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm 7}{6}$$

$$x = \frac{1}{3}, -2$$

したがって

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x - 2 &= 3\left(x - \frac{1}{3}\right)\{x - (-2)\} \\ &= (3x - 1)(x + 2) \end{aligned}$$

(2)　$2x^2+4x-5=0$ の解は

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-2\cdot(-5)}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{14}}{2}$$

したがって

$$2x^2+4x-5=2\left(x-\frac{-2+\sqrt{14}}{2}\right)\left(x-\frac{-2-\sqrt{14}}{2}\right)$$

(3)　$x^2+x+2=0$ の解は

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-8}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-7}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{7}\,i}{2}$$

したがって

$$x^2+x+2=\left(x-\frac{-1+\sqrt{7}\,i}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{7}\,i}{2}\right)$$

例題1の(3)のように，2次式は，因数の係数を複素数の範囲にまでひろげるとき，つねに1次式の積に因数分解される。

問3　例題1にならって，次の2次式を因数分解せよ。

(1)　$2x^2-3x-1$　　(2)　$2x^2+10x+11$

(3)　x^2+2x+5　　(4)　$2x^2+\sqrt{7}\,x+2$

63ページで学んだ2次方程式の解と係数の関係を逆に考えると，ある2つの数を解にもつような2次方程式を求めることができる。

練習問題

1.　次の2次方程式の2つの解の和と積を求めよ。

(1)　$5x^2+10x+8=0$　　(2)　$\sqrt{6}\,x^2-3\sqrt{2}\,x-\sqrt{3}=0$

2.　次の2次式を複素数の範囲で因数分解せよ。

(1)　$2x^2+4x+1$　　(2)　$x^2-2\sqrt{3}\,x+5$

3.　$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=5$ のとき，2つの数 α, β を解にもつ2次方程式を1つ作り，この方程式を解け。

〖5節〗連立方程式

1 連立1次方程式

連立2元1次方程式の解き方は中学校で学んだ。ふつう，2つの方程式から1つの文字を消去して，1元の方程式を導けばよい。たとえば，次の連立2元1次方程式

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 2y = -8 \end{cases}$$

では，x を消去することにより，$7y = 21$

これより　　$y = 3$，このとき　$x = -2$

3つの文字をもつ1次の方程式を3元1次方程式といい，これらを連立させたものを **連立3元1次方程式** という。解き方は，3つの方程式から1つの文字を消去して，連立2元1次方程式に導けばよい。

例題1 次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} x - y + z = 2 & ① \\ x + 2y - z = 2 & ② \\ 2x - 3y + 2z = 2 & ③ \end{cases}$$

解

①＋②より　　$2x + y = 4$　④

②×2＋③より　　$4x + y = 6$　⑤

⑤－④より　　$2x = 2$

よって　　$x = 1$　⑥

⑥を④に代入して　　$y = 2$　⑦

⑥，⑦を①に代入して　　$z = 3$

ゆえに　　$x = 1,\ y = 2,\ z = 3$

問1 次の連立方程式を解け。

(1) $\begin{cases} 2x+3y+z=2 \\ 3x+2y+z=4 \\ x+y+z=3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x-y=7 \\ 3y-z=5 \\ 3z-x=0 \end{cases}$

2 1次と2次の連立方程式

2つの文字を含む1次と2次の連立方程式の解き方は，1次方程式のもつ2つの文字のうち，1つの文字を他の文字を含む1次式で表し，それを2次式に代入して，1元の2次方程式に導けばよい。

例題2 次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} x+2y=5 & ① \\ x^2+2y^2=9 & ② \end{cases}$$

解 ①より　　$x=5-2y$　　③

③を②に代入して，整理すると

$$(5-2y)^2+2y^2=9$$
$$3y^2-10y+8=0$$
$$(3y-4)(y-2)=0$$

よって　　$y=\frac{4}{3}$　または　$y=2$

これを③に代入して

$y=\frac{4}{3}$ のとき　$x=\frac{7}{3}$，　$y=2$ のとき　$x=1$

ゆえに　　$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$　　$\begin{cases} x=\frac{7}{3} \\ y=\frac{4}{3} \end{cases}$

問2 次の連立方程式を解け。

(1) $\begin{cases} x-y=0 \\ 5x^2-y^2=16 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x-y-5=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

次の例題3のような連立方程式では，2次方程式の解と係数の関係を用いて解くことがある。

例題3 次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -2 \end{cases}$$

解 解と係数の関係から，x, y は t についての2次方程式

$$t^2 - 2t - 2 = 0$$

の2つの解である。この2次方程式を解いて

$$t = 1 \pm \sqrt{3}$$

よって　$x = 1 + \sqrt{3}$ ならば，$y = 1 - \sqrt{3}$

$x = 1 - \sqrt{3}$ ならば，$y = 1 + \sqrt{3}$

ゆえに　$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \\ y = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$　$\begin{cases} x = 1 - \sqrt{3} \\ y = 1 + \sqrt{3} \end{cases}$

問3 次の連立方程式を解け。

(1) $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 13x + 13y = 12 \\ -13xy = 1 \end{cases}$

例題4 直角三角形の直角をはさむ2辺の長さの差は1 cmで，小さい辺の長さの3倍から大きい辺の長さをひいたものは斜辺の長さに等しい。この2辺の長さを求めよ。

解 直角三角形の直角をはさむ2辺のうち，大きい辺を x cm，小さい辺を y cmとすると

斜辺の長さは　$3y - x$

x と y の間には，次の関係が成り立つ。

$$x - y = 1$$

三平方の定理から

$$(3y - x)^2 = x^2 + y^2$$

これを整理して

$$4y^2 - 3xy = 0$$

ここで，$x - y = 1$ だから，$x = y + 1$ を上の式に代入して解くと

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

$x > 0,\ y > 0$ であるから　　$x = 4,\ y = 3$

ゆえに，2辺の長さは　　4 cm と 3 cm

問4 》 長さ 24 cm の針金を折りまげて直角三角形を作りたい。斜辺の長さが 10 cm となるようにするには，他の2辺の長さをそれぞれいくらにすればよいか。

《 練習問題 》

1. 次の連立方程式を解け。

(1) $\begin{cases} x + y = 9 \\ y + z = 8 \\ z + x = 7 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = -11 \\ 5x + 4y - 6z = 5 \\ -4x + 7y - 8z = 14 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y = x - 5 \\ 9x^2 + 16y^2 = 144 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} y^2 = 4x + 1 \\ 2x + 3y + 5 = 0 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 - 3xy + y^2 = 5 \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

2. 長さの差が 12 cm の2本の針金がある。これを折りまげて，2つの正方形を作ったら，面積の差は 24 cm² であった。2本の針金の長さを求めよ。

〖6節〗因数定理と高次方程式

1 因数定理

x についての整式を，たとえば

$$f(x) = x^3 - 5x + 4, \quad g(x) = 3x^2 - 5x + 2$$

などのように，$f(x)$ や $g(x)$ などの記号を用いて表すことがある。この場合，$x = 2$ のときの整式の値を，$f(2)$ あるいは $g(2)$ と表す。

例1 〉 整式を $f(x) = x^3 - 5x + 4$ とすると，整式の値は

$x = 2$ のとき　$f(2) = 2^3 - 5\cdot 2 + 4 = 2$

$x = -1$ のとき　$f(-1) = (-1)^3 - 5\cdot(-1) + 4 = 8$

$x = 0$ のとき　$f(0) = 0^3 - 5\cdot 0 + 4 = 4$

$x = a$ のとき　$f(a) = a^3 - 5a + 4$

問1 〉 $f(x) = x^4 - x + 2$ について，次の値を求めよ。

(1) $f(3)$　(2) $f(0)$　(3) $f(-2)$　(4) $f(b)$

整式 $f(x)$ を1次式で割ったときの余りについて考えてみよう。

たとえば

$$f(x) = x^3 - 7x + 5$$

を1次式 $x - 2$ で割ると，

$$f(x) = x^3 - 7x + 5 = (x - 2)(x^2 + 2x - 3) - 1$$

と表される。$x = 2$ のときは

$$f(2) = 2^3 - 7\cdot 2 + 5 = -1$$

あるいは　$f(2) = 0\cdot(2^2 + 4 - 3) - 1 = -1$

したがって，上の3次式を1次式 $x - 2$ で割ったときの余り -1 は，3次式 $f(x) = x^3 - 7x + 5$ に $x = 2$ を代入した値 $f(2)$ に等しい。

整式 $f(x)$ を1次式 $x-a$ で割ったときの商を $g(x)$，余りを R とすれば，

$$f(x)=(x-a)g(x)+R$$

と表され，R は x を含まない定数となる。

$x=a$ とすれば

$$f(a)=(a-a)g(a)+R=R$$

したがって，次の **余りの定理** が成り立つ。

余りの定理

整式 $f(x)$ を1次式 $x-a$ で割ったときの余り R は

$$\boldsymbol{R=f(a)}$$

例2 〉 $f(x)=x^4-x+2$ について

$x-2$ で割った余りは　$f(2)=2^4-2+2=16$

$x+1$ で割った余りは　$f(-1)=(-1)^4-(-1)+2=4$

問2 〉 $f(x)=3x^3-x^2-8x+4$ を，次の1次式で割ったときの余りを求めよ。

(1)　$x-1$　　(2)　$x+1$　　(3)　$x+2$

問3 〉 整式 $f(x)$ を1次式 $ax-b$ で割った余りを R とするとき

$$R=f\left(\frac{b}{a}\right)$$

が成り立つことを示せ。

問4 〉 $f(x)=8x^4-6x^2-7$ を，次の1次式で割ったときの余りを求めよ。

(1)　$2x-1$　　(2)　$2x+3$

問5 〉 $f(x)=x^2+ax+b$ を $x-2$ で割ると余りは5で，$x+1$ で割ると余りは11となる。定数 a と b を定めよ。

例題1 整式 $f(x)$ を $x-1$ で割ると余りは6で，$x+3$ で割ると余りは -2 となる。

$f(x)$ を $(x-1)(x+3)$ で割ったときの余りを求めよ。

解 $f(x)$ を $(x-1)(x+3)$ で割ったときの商を $g(x)$，余りを1次式 $ax+b$ とすると，$f(x)$ は次のように表される。

$$f(x)=(x-1)(x+3)g(x)+ax+b$$

$f(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りは，$f(1)=6$ より

$$f(1)=(1-1)(1+3)g(1)+a+b$$
$$=6$$

よって　　$a+b=6$　　①

$f(x)$ を $x+3$ で割ったときの余りは，$f(-3)=-2$ より

$$f(-3)=(-3-1)(-3+3)g(-3)-3a+b$$
$$=-2$$

よって　　$-3a+b=-2$　　②

①，② を a，b について解いて

$$a=2,\quad b=4$$

ゆえに　　$2x+4$

問6 整式 $f(x)$ を x で割ると余りは1，$x+1$ で割ると余りは2となる。$f(x)$ を $x(x+1)$ で割ったときの余りを求めよ。

余りの定理で $R=f(a)=0$ のとき，x についての整式 $f(x)$ は1次式 $x-a$ で割りきれる。したがって，次の**因数定理**が成り立つ。

因数定理

整式 $f(x)$ について，$f(a)=0$ ならば，$f(x)$ は1次式 $x-a$ で割りきれる。

例3 〉 $f(x)=x^3-2x^2-x+2$ について

$$f(2)=2^3-2\cdot 2^2-2+2=0$$

であるから，$f(x)$ は $x-2$ で割りきれる。

問7 〉 $f(x)=x^3-2x^2-x+2$ は $x-1$ で割りきれるか。

問8 〉 $f(x)=x^4-2x^3+x^2-k$ が $x-3$ で割りきれるように，定数 k の値を定めよ。

例題2 〉 $f(x)=x^3-x^2-4x+4$ を因数分解せよ。

解 〉 $f(1)=0$ であるから，因数定理により $f(x)$ は $x-1$ で割りきれて，商は x^2-4 となる。

ゆえに　$f(x)=(x-1)(x^2-4)$

$=(x-1)(x+2)(x-2)$

問9 〉 次の整式を因数分解せよ。

(1)　x^3-7x-6　　(2)　x^4-2x^2+3x-2

2 高次方程式

$f(x)$ が n 次の整式であるとき，方程式 $f(x)=0$ を **n 次方程式** という。3次以上の方程式を高次方程式という。

例題3 〉 3次方程式 $x^3-1=0$ を解け。

解 〉 $x^3-1=0$ の左辺を因数分解すると

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

したがって

$$x-1=0 \quad \text{または} \quad x^2+x+1=0$$

よって　$x=1$　または　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

ゆえに　$x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

3乗して1となる数を1の **立方根** または **3乗根** という。

$x^3 - 1 = 0$ の3つの解

$$1, \quad \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}, \quad \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

は，いずれも1の立方根である。

問10 〉 1の虚数の立方根の1つをωで表せば，他の1つは ω^2 となることを示せ。また，$1 + \omega + \omega^2 = 0$ が成り立つことを示せ。

問11 〉 次の方程式を解け。

(1) $x^3 + 1 = 0$　　(2) $x^3 = 8$　　(3) $x^4 = 1$

因数定理を何回か用いることによって，次のように高次方程式が解けることがある。

例題4 〉 4次方程式 $x^4 - 8x^3 + 14x^2 - 8x + 1 = 0$ を解け。

解 〉 $f(x) = x^4 - 8x^3 + 14x^2 - 8x + 1$ とおく。

$$f(1) = 1 - 8 + 14 - 8 + 1 = 0$$

となるから，$f(x)$は $x - 1$ で割りきれる。

$$f(x) = (x-1)(x^3 - 7x^2 + 7x - 1)$$

$g(x) = x^3 - 7x^2 + 7x - 1$ とおく。

$$g(1) = 1 - 7 + 7 - 1 = 0$$

となるから，$g(x)$は $x - 1$ で割りきれる。

$$g(x) = (x-1)(x^2 - 6x + 1)$$

したがって，与えられた方程式は

$$(x-1)^2(x^2 - 6x + 1) = 0$$

よって

$$(x-1)^2 = 0 \quad \text{または} \quad x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$x = 1 \quad \text{または} \quad x = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

ゆえに　　$x = 1, \ 3 \pm 2\sqrt{2}$

問12 次の方程式を解け。

(1)　$x^3 - 3x + 2 = 0$　　(2)　$x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 3x + 4 = 0$

2次方程式の解き方を用いることによって，次のように高次方程式が解けることがある。

例題5 4次方程式 $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ を解け。

解 $x^2 = t$ とおくと，t についての2次方程式

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

が得られる。これを解いて

$$t = 1 \quad \text{または} \quad t = 4$$

すなわち　$x^2 = 1$　または　$x^2 = 4$

よって　$x = \pm 1$　または　$x = \pm 2$

ゆえに　$x = \pm 1,\ \pm 2$

問13 次の方程式を解け。

(1)　$x^4 - 16 = 0$　　(2)　$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

練習問題

1. $f(x) = 4x^2 - 2kx - k^2 + 1$ が $2x + 3$ で割りきれるように，k の値を定めよ。

2. 整式 $f(x)$ を $x - 1$ で割ると余りは3で，$x + 1$ で割ると余りは -5 である。$f(x)$ を $x^2 - 1$ で割ったときの余りを求めよ。

3. 1の虚数の立方根の1つを ω とするとき

$$1 + \omega^8 + \omega^{16}$$

の値を求めよ。

4. 次の方程式を解け。

(1)　$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$　　(2)　$x^3 + 6x^2 - x - 6 = 0$

(3)　$(x^2 - x)^2 - 3(x^2 - x) + 2 = 0$

〖7節〗 不等式

1 不等式とその解

2つの整式を不等号 $>$, $\geqq$ などで結びつけた式を **不等式** という。

不等式

$$x - 5 > 4x + 1, \qquad x^2 > x + 6$$

などについて，これを満たす x の値を不等式の **解** という。不等式の解の集合を，単に解ともいう。それを求めることを，**不等式を解く** という。実数と虚数の間，虚数と虚数の間では大小関係を考えないので，不等式の中に含まれる文字は，すべて実数を表すものとする。

不等式を解くには，第1章1節で学んだ実数の大小についての基本性質と符号の規則などがもとになる。たとえば，上の不等式

$$x - 5 > 4x + 1$$

を解いてみよう。

両辺に5を加える。すなわち，-5 を移項して

$$x > 4x + 6$$

両辺より $4x$ をひく。すなわち，$4x$ を移項して

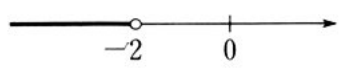
$$-3x > 6$$

両辺を -3 で割る。このとき，不等号の向きが変わるから

$$x < -2$$

したがって，解の集合は $\{x \mid x < -2\}$ である。これを単に

$x < -2$ と書くことにする。これを数直線上に示すと，右の図のようになる。



問1 次の不等式を解き，解を数直線上に図示せよ。

(1) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}>\frac{5}{6}-\frac{2}{3}x$　　(2) $\frac{1}{3}(1-2x)+1>2(x-1)$

例題1 次の2つの不等式を同時に満たす x の値の範囲を求めよ。

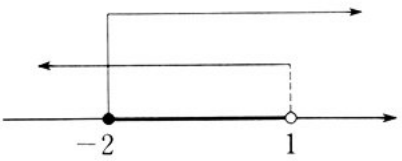
$$\begin{cases} 2x+1 \geqq -x-5 \\ 3x-1<x+1 \end{cases}$$

解 第1の式を解いて　$x \geqq -2$

第2の式を解いて　$x<1$

ゆえに，求める x の値の範囲は

$$-2 \leqq x<1$$



問2 次の2つの不等式を同時に満たす x の値の範囲を求めよ。

(1) $\begin{cases} -2x+1 \geqq x-5 \\ 3x+1>x-1 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} -5x+7<3x-9 \\ 1-2(x+1) \geqq 3(2-x) \end{cases}$

絶対値の記号を含む不等式は，絶対値の記号を含まない式に変形して解くとよい。

例題2 次の不等式を解け。

(1) $|x+3|<5$　　(2) $|x-2|>3$

解 (1) $x+3 \geqq 0$ すなわち，$x \geqq -3$ のとき

$x+3<5$ より　　$x<2$

したがって　　$-3 \leqq x<2$　　①

$x+3<0$ すなわち，$x<-3$ のとき

$-(x+3)<5$ より　　$x>-8$

したがって　　$-8<x<-3$　　②

ゆえに，①，② より

$$-8<x<2$$

(2)　$x-2 \geqq 0$ すなわち，$x \geqq 2$ のとき

$x-2>3$ より　　$x>5$

したがって　　$x>5$　　①

$x-2<0$ すなわち，$x<2$ のとき

$-(x-2)>3$ より　　$x<-1$

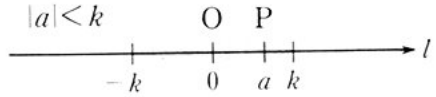
したがって　　$x<-1$　　②

ゆえに，①，② より　　$x<-1,\ 5<x$

問3 次の不等式を解け。

(1)　$|1-2x|<4$　　(2)　$|2x-3|>5$

a を実数とし，k を正の実数とするとき，点 P(a) と原点との距離を考えると



$|a|<k$ ならば　　$-k<a<k$

$|a|>k$ ならば　　$a<-k$ または $k<a$

が成り立つことがわかる。

このことは絶対値の記号を含む不等式を解くのに役立つ。

例1 $|x-3|<4$ ならば　　$-4<x-3<4$

ゆえに　　$-1<x<7$

問4 問3の不等式を例1にならって解け。

2 2次不等式

不等式において，移項して整理することにより，次のいずれかの形になる不等式を **2次不等式** という。ただし，$a \neq 0$ とする。

$$ax^2+bx+c>0,\qquad ax^2+bx+c<0$$

$$ax^2+bx+c \geqq 0,\qquad ax^2+bx+c \leqq 0$$

たとえば，2次式 $x^2 - x - 6$ は，x のとる値によって，正，0，負の値をとる。これを用いて，2次不等式

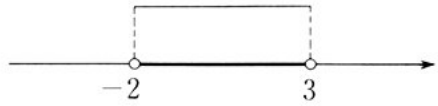
$$x^2 - x - 6 < 0$$

を解いてみよう。

$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$ となるから，x の値によって，この式の値の符号の変化を調べると，次の表のようになる。

x の範囲	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x$
$x + 2$	−	0	+	+	+
$x - 3$	−	−	−	0	+
$(x + 2)(x - 3)$	+	0	−	0	+

上の表から，$x^2 - x - 6 < 0$ を満たす解は　　$-2 < x < 3$



例題3　2次不等式 $-x^2 + 4x - 3 \leqq 0$ を解け。

解　両辺に -1 を掛けると

$$x^2 - 4x + 3 \geqq 0$$

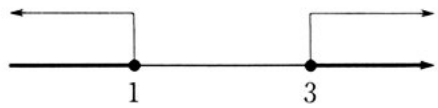
$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$$

より，この2次式の値の符号の変化は次の表のようになる。

x の範囲	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x$
$x - 1$	−	0	+	+	+
$x - 3$	−	−	−	0	+
$(x - 1)(x - 3)$	+	0	−	0	+

上の表から，求める解は

$x \leqq 1,\ x \geqq 3$



問5 次の2次不等式を解き，解を数直線上に図示せよ。

(1) $(x-2)(x+3)>0$　　(2) $x(x-2)\leqq 0$

(3) $-x^2+3x-2<0$　　(4) $2x^2-3x-2\leqq 0$

2次式 ax^2+bx+c が，次のように，異なる2つの因数の積

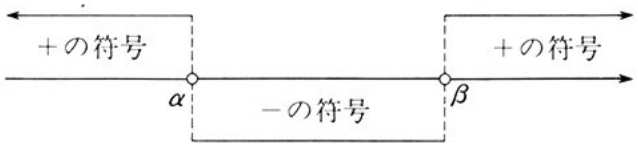
$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

で表されるとき，$ax^2+bx+c=0$ の判別式は正である。

$a>0$ ならば，ax^2+bx+c の符号と $(x-\alpha)(x-\beta)$ の符号は等しい。そこで，$\alpha<\beta$ として，$(x-\alpha)(x-\beta)$ の値の符号を調べると，次の表のようになる。

x の範囲	$x<\alpha$	$x=\alpha$	$\alpha<x<\beta$	$x=\beta$	$\beta<x$
$x-\alpha$	−	0	+	+	+
$x-\beta$	−	−	−	0	+
$(x-\alpha)(x-\beta)$	+	0	−	0	+

$a>0$ として，$a(x-\alpha)(x-\beta)$ の符号を数直線上に表す。



等号の成り立つ場合も含めて，これらをまとめると次のようになる。

$D>0$ のときの2次不等式の解

$a>0$，$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$，$\alpha<\beta$ として

(1) $a(x-\alpha)(x-\beta)>0$ の解は　$x<\alpha,\ \beta<x$

　　$a(x-\alpha)(x-\beta)\geqq 0$ の解は　$x\leqq\alpha,\ \beta\leqq x$

(2) $a(x-\alpha)(x-\beta)<0$ の解は　$\alpha<x<\beta$

　　$a(x-\alpha)(x-\beta)\leqq 0$ の解は　$\alpha\leqq x\leqq\beta$

例題4 次の2次不等式を解け。

(1)　$x^2+2x-35<0$　　(2)　$-x^2+x+10 \leqq x(x+5)$

解 (1)　$x^2+2x-35=(x+7)(x-5)$ より

$$\{x-(-7)\}(x-5)<0$$

ゆえに　　$-7<x<5$

(2)　移項して整理すると

$$-2x^2-4x+10 \leqq 0$$

両辺を -2 で割ると

$$x^2+2x-5 \geqq 0$$

$x^2+2x-5=0$ の解は $x=-1\pm\sqrt{6}$

したがって

$$x^2+2x-5=\{x-(-1-\sqrt{6})\}\{x-(-1+\sqrt{6})\}$$

これから　　$\{x-(-1-\sqrt{6})\}\{x-(-1+\sqrt{6})\} \geqq 0$

ゆえに　　$x \leqq -1-\sqrt{6},\ -1+\sqrt{6} \leqq x$

問6 次の不等式を解け。

(1)　$(x-2)(x-4)<0$　　(2)　$x-x^2 \leqq 0$

(3)　$x^2-3x-2>0$　　(4)　$2(x+3) \geqq 2x^2+1$

問7 次の不等式を満たす x の整数値をすべて求めよ。

(1)　$x^2-11x+24 \leqq 0$　　(2)　$1+4x-2x^2 \geqq 0$

(3)　$2x^2+4x-30<0$　　(4)　$-7x^2-4x+3>0$

2次式 ax^2+bx+c が，次のように，同一の2つの因数の積

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2$$

で表されるとき，$ax^2+bx+c=0$ の判別式は0である。

$a>0$ ならば，$a(x-\alpha)^2 \geqq 0$ であるので，$x=\alpha$ のときに限り $a(x-\alpha)^2=0$ となる。

したがって，$ax^2 + bx + c$ は，x が α 以外のすべての実数に対して正となる。また，この場合，$ax^2 + bx + c < 0$ を満たす実数値はない。このとき，$ax^2 + bx + c < 0$ は**解なし**という。

等号の成り立つ場合も含めて，これらをまとめると次のようになる。

$D = 0$ のときの2次不等式の解

$a > 0$，$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2$ として

(1)
- $a(x - \alpha)^2 > 0$ の解は　α 以外の実数全体
- $a(x - \alpha)^2 \geqq 0$ の解は　実数全体

(2)
- $a(x - \alpha)^2 < 0$ は　解なし
- $a(x - \alpha)^2 \leqq 0$ の解は　$x = \alpha$

例題5 次の2次不等式を解け。

(1)　$x^2 - 4x + 4 > 0$　　(2)　$-x^2 + 4x - 4 > 10x + 5$

解 (1)　$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$

$(x - 2)^2 > 0$ より，解は2以外の実数全体である。

(2)　移項して整理すると

$$-x^2 - 6x - 9 > 0$$

したがって　$x^2 + 6x + 9 < 0$

ここで　$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

しかし，つねに $(x + 3)^2 \geqq 0$ である。よって，解なし。

問8 次の不等式を解け。

(1)　$4x^2 - 4x + 1 > 0$　　(2)　$x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 \leqq 0$

(3)　$6x^2 + 8x + 6 < (x - 1)^2$

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式 D が負であるときを考えてみよう。2次式 $ax^2 + bx + c$ は次ページのように変形できる。

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-D}{4a}$$

$a>0$ ならば，ax^2+bx+c は，すべての実数値に対して正となる。したがって，$ax^2+bx+c\leqq 0$ は解なしである。

等号の成り立つ場合も含めて，これらをまとめると次のようになる。

$D<0$ のときの2次不等式の解

$a>0$，　$ax^2+bx+c=a(x+p)^2+q$，

$$p=\frac{b}{2a},\quad q=\frac{-D}{4a}>0 \text{ として}$$

(1)　$a(x+p)^2+q>0$ の解は　　実数全体

(2)　$a(x+p)^2+q\leqq 0$ は　　解なし

例題6　次の2次不等式を解け。

(1)　$x^2-2x+2>0$　　(2)　$2x^2-12x+21\leqq 0$

解　(1)　$x^2-2x+2=(x^2-2x+1)+1=(x-1)^2+1$

$(x-1)^2+1>0$ より，解は実数全体である。

(2)　$2x^2-12x+21=2(x^2-6x+9)+3$

$=2(x-3)^2+3$

どのような実数 x についても $2(x-3)^2+3>0$ となって，解なしである。

問9　次の不等式を解け。

(1)　$x^2-8x+17>0$　　(2)　$x^2-7x-11\geqq 2x^2-x$

例題7　次の不等式を同時に満たす x の値の範囲を求めよ。

$$\begin{cases}(x+1)(x-3)\leqq 2x(x+1) & ①\\ x^2-x-20<0 & ②\end{cases}$$

解 ① について，移項して整理する。

$$x^2 + 4x + 3 \geqq 0$$

$x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$ より

$$(x + 1)(x + 3) \geqq 0$$

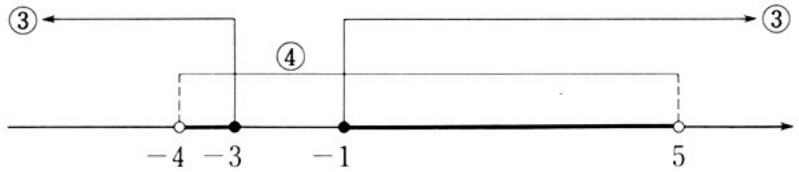
よって　　$x \leqq -3,\quad -1 \leqq x$　　③

② は $x^2 - x - 20 = (x + 4)(x - 5)$ より

$$\{x - (-4)\}(x - 5) < 0$$

したがって　　$-4 < x < 5$　　④

③ と ④ を数直線上に表すと



ゆえに，共通部分をとって，求める範囲は

$$-4 < x \leqq -3,\quad -1 \leqq x < 5$$

問10 次の不等式を同時に満たす x の値の範囲を求めよ。

(1) $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \leqq 0 \\ 2x^2 - x > 0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2 + 4x - 21 > 0 \\ -x^2 + x + 6 \leqq 0 \end{cases}$

練習問題

1. 次の不等式を解け。

(1) $x(x - 2) < 2x(x + 1)$　　(2) $x^2 + 5 \leqq 3x$

(3) $(x + 1)(3x - 5) \geqq (x + 1)(x + 2) + 5$

2. 次の不等式を同時に満たす x の値の範囲を求めよ。

(1) $\begin{cases} x^2 + 4x \leqq 12x + 9 \\ |2x - 3| > 1 \end{cases}$　　(2) $4x - 3 \leqq x^2 \leqq 8x - 7$

第3章の問題

A

1. 次の計算をせよ。

(1) $(3+\sqrt{-8})+(7-\sqrt{-2})$　(2) $(2+i)(3-5i)$

(3) $1-i+i^2-i^3+i^4-i^5$　(4) $\dfrac{\sqrt{2}\,i}{\sqrt{2}-i}+\dfrac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}\,i}$

2. 次の方程式を解け。

(1) $3x^2-7x+2=0$　(2) $2(x-2)(x-4)=x^2-12$

(3) $x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=x$　(4) $x^3-2x^2-9x+4=0$

3. 2次方程式 $x^2-(m-1)x+m+2=0$ が重複解をもつように，定数 m の値を定めよ。また，そのときの解を求めよ。

4. $x^2+x+4=0$ の2つの解を α，β として，次の式の値を求めよ。

(1) $(\alpha-\beta)^2$　(2) $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$　(3) $\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(\beta+\dfrac{1}{\beta}\right)$

5. 次の2つの数を解にもつような2次方程式を1つ作れ。

(1) $2+\sqrt{3}$，$2-\sqrt{3}$　(2) $3+\sqrt{2}\,i$，$3-\sqrt{2}\,i$

6. x^4-x^2-6 を次の数の範囲で因数分解せよ。

(1) 有理数　(2) 実数　(3) 複素数

7. 次の連立方程式を解け。

(1) $\begin{cases} x-2y+z=-8 \\ 2x+y-z=3 \\ -x+3y+2z=1 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x^2+x-2y=16 \end{cases}$

8. 整式 $f(x)$ を $x-1$ で割ると余りは7で，$x+2$ で割ると余りは -2 になるという。$f(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ。

9. 次の不等式を解け。

(1) $2+3x-2x^2 \geqq x^2+2x$　(2) $|5-2x|-2>0$

(3) $x(x+7)<(2x+1)(x+5)$　(4) $x^2-x<x+3<2x-1$

10　次の各組の不等式を同時に満たす x の値の範囲を求めよ。

(1) $\begin{cases} x^2 - x - 6 < 0 \\ 1 - x < 2x + 5 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x^2 - 5x - 3 \leqq 0 \\ 4x - x^2 < 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x^2 + 4x - 4 > 0 \\ 3 + 5x - 2x^2 \leqq 0 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x(x - 3) < 0 \\ |1 + 2x| < 3 \end{cases}$

B

1.　次の方程式を解け。

(1)　$x^4 - 10x^2 + 1 = 0$

(2)　$x^4 - 2x^3 - x + 2 = 0$

(3)　$(x^2 + 3x)^2 - (x^2 + 3x) - 12 = 0$

(4)　$x(x - 1)(x + 1)(x + 2) = 24$

2.　$x = 2 + i$ が方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の1つの解であるとき，a と b とを求めよ。ただし，a, b は実数とする。

また，$x = 2 - i$ のとき，$f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x + 1$ の値を求めよ。

3.　平方して i となる複素数を，$(x + yi)^2 = i$ を満たす実数 x, y を定めることにより求めよ。

4.　方程式 $x^3 - 6x^2 + ax + b = 0$ の2つの解は3と -2 である。そのとき，次の問に答えよ。

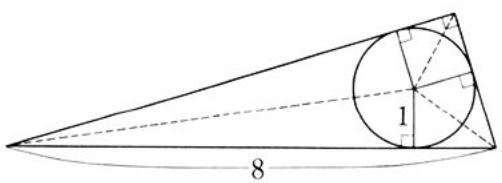
(1)　a, b の値を求めよ。　　(2)　残りの解を求めよ。

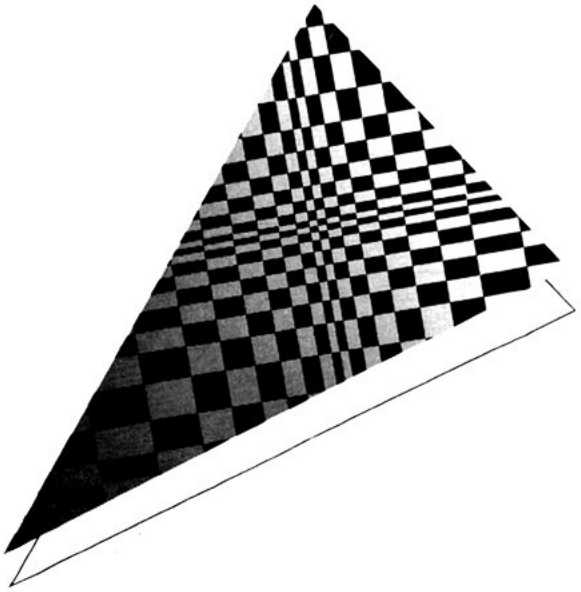
5.　x についての2つの2次方程式 $x^2 + (k + 1)x - k^2 + 2 = 0$, $x^2 - kx + k^2 - 1 = 0$ について，次の問に答えよ。

(1)　2つの方程式がともに虚数解をもつような k の値の範囲を求めよ。

(2)　少なくとも一方の解が実数解となるような k の値の範囲を求めよ。

6.　半径1の円に外接する直角三角形の斜辺の長さが8であるとき，直角をはさむ2辺の長さを求めよ。





第4章 式と証明

1節・等式の証明
2節・不等式の証明
3節・命題と論理

学問である数学の根幹をなすものは論理と証明である。数学の内容が初等的なものでも，また，具体的な事実の積み上げの段階でも，そこに貫かれているものは論理的な推論である。論理的な推論は，古代ギリシアにおいて，プラトンやアリストテレスによってはじめて明確な形でとらえられた。

近代になり，証明の理論をめぐって，デカルトやパスカルなどの哲学者によってその方法論が論じられ，基本的な考え方が与えられた。また，ライプニッツによって記号論理学への道が開かれた。

19世紀末近くにカントルの集合論がおこり，数学の各分野に大きな影響を与えたが，数学の原理や論理をみなおし深める数学基礎論という新しい分野も開かれ，記号論理学とともに発展しつつある。

〖1節〗 等式の証明

1 恒等式

次の2つの等式

$$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$$

$$x(x - 6) + 4(x - 2) = (x + 2)(x - 4)$$

は，左辺を因数分解すれば右辺になるから，x がどのような数であっても成り立っている。このように，含まれている文字にどのような数を代入しても成り立つ等式を **恒等式** という。たとえば，乗法公式や，因数分解の公式は恒等式である。

等式が恒等式であることを証明するためには，等式の左辺と右辺が等しいことを示せばよい。

以下では，「等式が恒等式であることを証明せよ」という代わりに，「等式を証明せよ」と表すことにする。

例題1 次の等式を証明せよ。

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

証明 左辺と右辺をそれぞれ展開すると

$$\text{左辺} = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$$

$$\text{右辺} = (a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2) + (a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2)$$

$$= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$$

ゆえに　　左辺 = 右辺

注意 等式を証明するには，「一方から他方を導く」，とか「それぞれを展開または変形した式が等しい」，とか「両辺の差が0である」，などの方法を用いるとよい。

問1 次の等式を証明せよ。

(1) $x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

(2) $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$
$= 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

例題2 次の等式を証明せよ。

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{y-1} = \frac{y-x}{(x-1)(y-1)}$$

証明 左辺を通分して整理すると

$$\text{左辺} = \frac{y-1}{(x-1)(y-1)} - \frac{x-1}{(x-1)(y-1)} = \frac{y-1-(x-1)}{(x-1)(y-1)}$$
$$= \frac{y-x}{(x-1)(y-1)}$$

ゆえに　　左辺 = 右辺

注意 分数式では，分母を 0 とする値を除いて考える。

問2 次の等式を証明せよ。

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{4}{1-x^4}$$

式の中である文字に着目し，その他の文字は係数とみなして，恒等式として考えることがある。たとえば，等式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

が x についての恒等式であるということは，x のどのような値についても，この等式が成り立つことである。恒等式であるための条件を求めてみよう。

与えられた等式が x のどのような値についても成り立つから，x に 0, 1, -1 を代入し

$$c = 0$$
$$a + b + c = 0$$
$$a - b + c = 0$$

でなければならない。これから

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0$$

である。逆に，$a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ が成り立てば，与えられた等式は，どのような x の値についても成り立つ。

問3 次の等式が x についての恒等式となるように，a, b, c の値を求めよ。

(1) $a(x-1)^2 + b(x-1) + c = 0$

(2) $(2a+b)x^2 - (a-b+c)x + (a+b-1) = 0$

等式　　$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$

が x についての恒等式であるならば

$$(a-a')x^2 + (b-b')x + (c-c') = 0$$

が x についての恒等式である。そのための条件は

$$a = a', \quad b = b', \quad c = c'$$

である。

x についての恒等式の条件

$ax^2 + bx + c = 0$ が x についての恒等式となるのは

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0$$

の場合に限る。

$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ が x についての恒等式となるのは

$$a = a', \quad b = b', \quad c = c'$$

の場合に限る。

同様にして，$f(x)$, $g(x)$ がともに n 次式であるとき，$f(x) = g(x)$ が x についての恒等式となるのは，$f(x)$ と $g(x)$ の同じ次数の項の係数がそれぞれ等しい場合に限る。

例1 等式 $ax^3+2bx^2-3x+d=x^3+cx+4$ が x についての恒等式であるならば，係数を比べて

$$a=1,\quad b=0,\quad c=-3,\quad d=4$$

問4 等式 $(x-2)^3+a(x-2)^2+b(x-2)+c=x^3$ が x についての恒等式となるように，a, b, c の値を定めよ。

分数式の証明は，分母を払って，整式に直して考えるとよい。

例題3 次の等式が x についての恒等式となるように，a, b, c の値を定めよ。

$$\frac{x^2-x-6}{x^3-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

解 通分して，両辺の分母を払って

$$x^2-x-6=a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1)$$

$$x^2-x-6=(a+b)x^2+(a-b+c)x+(a-c)$$

この等式が x についての恒等式となるように，a, b, c の値を定めればよい。両辺の係数を比べて

$$a+b=1$$

$$a-b+c=-1$$

$$a-c=-6$$

これらを解いて

$$a=-2,\qquad b=3,\qquad c=4$$

問5 次の等式が x についての恒等式となるように，a, b, c の値を定めよ。

(1) $\dfrac{2x^2+5x-1}{x(x^2+1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$

(2) $\dfrac{6}{x(x-1)(x-3)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{x-3}$

2 条件つき等式

等式のなかには，ある条件のもとで成り立つ恒等式もある。

例題4 $a+b=1$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$a^2+b=b^2+a$$

証明

$$\begin{aligned}\text{左辺}-\text{右辺}&=(a^2+b)-(b^2+a)\\&=(a^2-b^2)-(a-b)\\&=(a-b)(a+b)-(a-b)\\&=(a-b)(a+b-1)=0\end{aligned}$$

ゆえに　$a^2+b=b^2+a$

問6 $a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$a^2-bc=b^2-ca$$

例題5 $x-2y=1$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$x^2-4y^2-4y=1$$

証明 $x=2y+1$ であるから

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=(2y+1)^2-4y^2-4y\\&=(4y^2+4y+1)-4y^2-4y\\&=1\end{aligned}$$

ゆえに　$x^2-4y^2-4y=1$

注意 条件つき等式の証明では，条件の式を用いて1つの文字を消去して証明する方法もよく用いられる。

問7 $a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$(a-b)(a+c)=a^2+b^2+ac$$

問8 $ab=1$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}=1$$

3 比例式

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のように，いくつかの比が等しいことを示す等式を **比例式** という。比例式の証明について考えてみよう。

例題6 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のとき，次の等式を証明せよ。

(1) $\frac{a+2b}{b}=\frac{c+2d}{d}$　　(2) $\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}$

証明 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ とおくと，$a=bk$，$c=dk$ となるので，a, c にそれぞれ bk, dk を代入して整理する。

(1) 左辺 $=\frac{a+2b}{b}=\frac{bk+2b}{b}=k+2$

右辺 $=\frac{c+2d}{d}=\frac{dk+2d}{d}=k+2$

ゆえに　　左辺 = 右辺

(2) 左辺 $=\frac{a-b}{a+b}=\frac{bk-b}{bk+b}=\frac{k-1}{k+1}$

右辺 $=\frac{c-d}{c+d}=\frac{dk-d}{dk+d}=\frac{k-1}{k+1}$

ゆえに　　左辺 = 右辺

問9 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のとき，次の等式を証明せよ。

(1) $\frac{b}{a-b}=\frac{d}{c-d}$　　(2) $\frac{ab}{(a-b)^2}=\frac{cd}{(c-d)^2}$

(3) $\frac{4a+3b}{2a-5b}=\frac{4c+3d}{2c-5d}$

たとえば，$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$ のように，いくつかの比が等しいとき，

$$a' : b' : c' = a : b : c$$

と書くことがある。

例題7 $x : y : z = 5 : 3 : 2$ のとき

$$(x - y) : (y - z) : (z - x) = 2 : 1 : -3$$

が成り立つことを示せ。

証明 $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{2} = k$ とおくと，$x = 5k,\ y = 3k,\ z = 2k$

したがって

$$\begin{aligned}&(x - y) : (y - z) : (z - x)\\ &= (5k - 3k) : (3k - 2k) : (2k - 5k)\\ &= 2k : k : -3k\\ &= 2 : 1 : -3\end{aligned}$$

ゆえに　　左辺 = 右辺

問10 $x : y : z = 2 : 3 : 5$ のとき，$xy : yz : zx = 6 : 15 : 10$ が成り立つことを示せ。

練習問題

1. 次の等式を証明せよ。

(1) $(a + b - c)^2 + (a + b + c)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab)$

(2) $\dfrac{1}{(a - b)(a - c)} + \dfrac{1}{(b - c)(b - a)} + \dfrac{1}{(c - a)(c - b)} = 0$

2. 次の等式が x についての恒等式となるように，$a,\ b,\ c$ の値を定めよ。

$$\frac{x^2 - 4x + 1}{x(x^2 - 1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x + 1} + \frac{c}{x - 1}$$

3. $x + 2y = 0$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$2(x^2 + y^2) = -5xy$$

4. $\dfrac{a}{5} = \dfrac{b}{3} = \dfrac{c}{2}$ のとき，次の比例式を証明せよ。

$$\frac{a - b}{2} = b - c = \frac{c - a}{-3}$$

〖2節〗不等式の証明

1 不等式と証明

第3章7節と同じように，不等式の中にあらわれる文字は，すべて実数を表すものとする。実数の大小関係については第1章で学び，1次と2次の不等式の解き方については第3章で学んだ。それらのうち，基本的な不等式の性質をまとめておこう。

I．$a > b$ かつ $b > c$ ならば，$a > c$

II．$a > b$ ならば，$a + c > b + c$，$a - c > b - c$

III．$a > b$ かつ $c > 0$ ならば，$ac > bc$，$\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$

$a > b$ かつ $c < 0$ ならば，$ac < bc$，$\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$

IV．$a^2 \geqq 0$　等号が成り立つのは $a = 0$ のときに限る。

いくつかの文字を含む不等式が，それらの文字にどのような数を代入しても成り立つことを証明することを，以下では単に「不等式を証明する」という。

例1 〉 不等式 $a^2 + b^2 \geqq 0$ を証明してみよう。

$a^2 \geqq 0$ の両辺に b^2 を加えると　　$a^2 + b^2 \geqq b^2$

$b^2 \geqq 0$ であるから　　$a^2 + b^2 \geqq 0$

ここで，等号が成り立つのは，$a = 0$, $b = 0$ のときに限る。

問1 〉 次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのような場合であるかを調べよ。

(1)　$a^2 + b^2 + c^2 \geqq 0$

(2)　$(x + y)^2 + (x - y)^2 \geqq 0$

例題1 次の不等式を証明せよ。また，等号はどのような場合に成り立つか。

$$a^2 + b^2 \geqq ab$$

証明 $$a^2 + b^2 - ab = a^2 - ab + \frac{b^2}{4} + \frac{3}{4}b^2$$

$$= \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2$$

$\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 \geqq 0$, $\frac{3}{4}b^2 \geqq 0$ であるから

$$a^2 + b^2 - ab \geqq 0$$

すなわち $$a^2 + b^2 \geqq ab$$

$\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 = 0$, $\frac{3}{4}b^2 = 0$ となるのは，$a = \frac{b}{2}$ かつ $b = 0$ すなわち $a = 0, b = 0$ のときに限る。ゆえに，等号が成り立つのは $a = 0, b = 0$ のときに限る。

注意 不等式 $A > B$ を証明するとき，前ページのIIより得られる

$$A > B \iff A - B > 0$$

がよく用いられる。

問2 次の不等式を証明せよ。また，等号の成り立つ場合を求めよ。

(1) $2(a^2 + b^2) \geqq (a + b)^2$

(2) $a^2 + b^2 + c^2 \geqq bc + ca + ab$

(3) $x^2 + y^2 \geqq 2x - 4y - 5$

例題2 $a > 0, b > 0$ のとき，次のことを証明せよ。

$$a > b \iff \frac{1}{b} > \frac{1}{a}$$

証明 $ab > 0$ であるから，$a > b$ の両辺を ab で割れば，$\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$

また，$\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$ の両辺に ab を掛ければ，$a > b$

ゆえに　　$a > b \iff \dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{a}$

問3 》 $a > b > 0,\ c > d > 0$ のとき，$ac > bd$ を証明せよ。

$a > 0,\ b > 0$ のとき

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

について，$a + b > 0$ であるから

$$a^2 - b^2 > 0 \iff a - b > 0$$

したがって，次のことが成り立つ。

V．$a > 0,\ b > 0$ のとき

$$a > b \iff a^2 > b^2$$

〈注意〉 この性質は，根号を含む不等式の証明によく用いられる。

例題3 》 $a > 0,\ b > 0$ のとき，次の不等式を証明せよ。

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a + b}$$

証明 》 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a + b})^2 = a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b - (a + b)$

$$= 2\sqrt{a}\sqrt{b} > 0$$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0,\ \sqrt{a + b} > 0$ であるから

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a + b}$$

問4 》 次の不等式を証明せよ。

(1)　$a > b > 0$ のとき　　$\sqrt{a - b} > \sqrt{a} - \sqrt{b}$

(2)　$x > 0$ のとき　　$\sqrt{1 + x} < 1 + \dfrac{x}{2}$

$a > 0,\ b > 0$ のとき

$\dfrac{a + b}{2}$ を **相加平均**，$\sqrt{ab}$ を **相乗平均**

という。その大小関係を調べてみよう。

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-(\sqrt{ab})^2=\frac{a^2+2ab+b^2}{4}-ab$$

$$=\frac{a^2-2ab+b^2}{4}=\frac{(a-b)^2}{4}\geqq 0$$

となり，次の不等式が成り立つ。

相加平均と相乗平均

$a>0,\ b>0$ のとき

$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$$

すなわち　　(相加平均) ≧ (相乗平均)

が成り立つ。等号が成り立つのは $a=b$ のときに限る。

例2 〉 $a>0$ のとき

$$a+\frac{1}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$$

すなわち　　$a+\frac{1}{a}\geqq 2$

等号が成り立つのは $a=1$ のときに限る。

問5 〉 $a>0,\ b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。

(1) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqq 2$　　(2) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqq\frac{2}{\sqrt{ab}}$

2 絶対値を含む不等式

次の基本性質は，絶対値を含む不等式の証明によく用いられる。

I. $|a|\geqq 0$　　等号が成り立つのは $a=0$ のときに限る。

$|a|\geqq a$　　等号が成り立つのは $a\geqq 0$ のときに限る。

II. $|a|^2=a^2,\ |a|=|-a|$

III. $|ab|=|a||b|$

例題4 次の不等式を証明せよ。また，等号はどのような場合に成り立つか。

$$|a|+|b| \geqq |a+b|$$

証明

$$\begin{aligned}&(|a|+|b|)^2-|a+b|^2\\&=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2\\&=a^2+2|ab|+b^2-(a^2+2ab+b^2)\\&=2(|ab|-ab)\geqq 0\end{aligned}$$

ゆえに　$|a|+|b| \geqq |a+b|$

等号が成り立つのは，$|ab|=ab$ のとき，すなわち，$ab \geqq 0$ のときであるから，a, b が同符号であるか，$a=0$ または $b=0$ であるときに限る。

問6 次の不等式を証明せよ。また，等号はどのような場合に成り立つか。

(1) $|a-b| \geqq |a|-|b|$　　(2) $|a+b| \geqq |a|-|b|$

練習問題

1. 次の不等式を証明せよ。また，等号はどのような場合に成り立つか。

(1) $x^2+4xy+5y^2 \geqq 0$　　(2) $x^2+y^2+13 \geqq 4x+6y$

(3) $4(x^2+y^2) \geqq 3x(x+y)$

(4) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$

2. $a>0$, $b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，(1)で等号が成り立つのはどのような場合か。

(1) $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geqq 4$　(2) $\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}>\sqrt{1+a+b}$

3. 不等式 $|a|+|b| \leqq \sqrt{2(a^2+b^2)}$ を証明せよ。また，等号はどのような場合に成り立つか。

〖3節〗 命題と論理

1 命　題

正しいか正しくないかが判断できるようなことがらを述べた文，または式を **命題** という。命題が正しいときは，その命題は **真**，命題が正しくないときは，その命題は **偽** であるという。

例1 〉 次の①～③について考えてみよう。

① 三角形の内角の和は 180° である。

② $x^2 > 0$ ならば，$x > 0$ である。

③ $xy \geqq -1$

これらのうち，①，② は命題であるが，③ は x, y の値によって真にも偽にもなりうるので，命題ではない。

問1 〉 次の文あるいは式のうち，命題であるものはどれか。

(1) 7は91の約数である。　(2) $x + 2y = 0$

(3) $x^2 - 2x - 3 = 0$ を解け。　(4) -4 は正の数である。

例1の③のように，いくつかの文字を含み，それらに特定の値を代入したときに命題となる文または式を **条件** という。数学では，条件 p, q に対して

「p ならば，q である」

の形で述べられる命題を扱うことが多い。これを記号 $\Longrightarrow$ を用いて

$$p \Longrightarrow q$$

と表す。p をこの命題の **仮定**，q を **結論** という。

問2 〉 例1の①～③について，仮定と結論をいえ。

2 必要条件と十分条件

2つの三角形，△ ABC と △ A′B′C′ について考えてみよう。この2つの三角形が合同であれば，それらの面積は等しくなるから

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \Longrightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C'$$

は真な命題を表している。

このように，命題 $p \Longrightarrow q$ が真であるとき，

q は，p であるための **必要条件** である

p は，q であるための **十分条件** である

という。

例2 〉 $a \geqq 1 \Longrightarrow a > 0$

は真であるから

条件 $a > 0$ は，$a \geqq 1$ であるための必要条件である。

条件 $a \geqq 1$ は，$a > 0$ であるための十分条件である。

問3 〉 次の □ の中に，「必要」，「十分」のうち適切な語を入れよ。

(1) $x = 2$ は，$x^2 = 4$ であるための □ 条件

(2) $x^2 = 4$ は，$x = 2$ であるための □ 条件

(3) 6の約数であることは，12の約数であるための □ 条件

(4) 12の約数であることは，6の約数であるための □ 条件

(5) $a + b > 0$ は，$a > 0$, $b > 0$ であるための □ 条件

たとえば，2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式を D とするとき，「$ax^2 + bx + c = 0$ が実数解をもつならば，$D \geqq 0$ である」と，「$D \geqq 0$ ならば，$ax^2 + bx + c = 0$ は実数解をもつ」は，どちらも真である。

「$p \Longrightarrow q$ かつ $q \Longrightarrow p$」の形の命題はよく用いられる。一般に，命題「$p \Longrightarrow q$ かつ $q \Longrightarrow p$」が真であるとき，p と q をたがいに他

の **必要十分条件** であるという。また，このとき，p と q は **同値** であるという。

例3 「$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \Longrightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C'$ かつ $\triangle ABC = \triangle A'B'C' \Longrightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$」は，偽な命題である。

例4 実数 a, b について，$a > 0, b > 0$ であるための必要十分条件は，$a + b > 0,\ ab > 0$ である。

問4 次の □ の中に，「必要」，「十分」，「必要十分」のうち，適切な語を入れよ。

(1) $x > 2$ は $x^2 > 4$ であるための □ 条件

(2) $a < 0, b < 0$ は $a + b < 0, ab > 0$ であるための □ 条件

(3) $a^2 + b^2 > 1$ は $a > 1, b > 1$ であるための □ 条件

例題1 x の2次方程式 $x^2 + px + q = 0$ が，正の解と負の解をもつための必要十分条件を求めよ。

解 与えられた方程式が正の解 α と負の解 β をもつとすれば，$\alpha\beta < 0$ である。解と係数の関係によって，$\alpha\beta = q$ であるから $q < 0$ が成り立つ。

逆に，$q < 0$ が成り立つとき，与えられた方程式の判別式 $D = p^2 - 4q$ について $p^2 \geqq 0, -4q > 0$ であるから $D > 0$ となる。よって，この方程式は異なる2つの実数解 α, β をもち，$\alpha\beta = q$ より，$\alpha\beta < 0$ となる。したがって，α と β は異符号である。

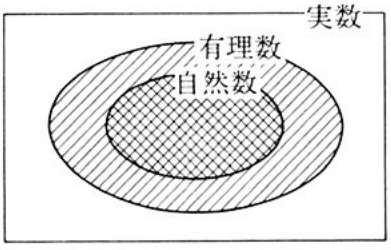
ゆえに，求める必要十分条件は，$q < 0$ である。

問5 2次方程式 $x^2 + px + q = 0$ の解が，2つとも正の解であるための必要十分条件を求めよ。

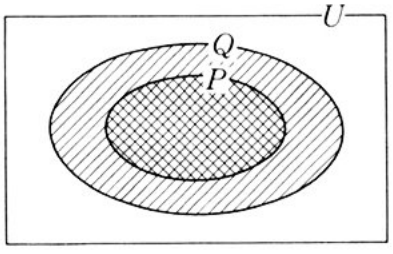
3 命題と集合

全体集合を実数全体として，条件 p, q をそれぞれ「x は自然数である」，「x は有理数である」とする。このとき，条件 p, q を満たす要素の集合をそれぞれ P, Q とすると，次のように書ける。

$$P = \{x \mid x \text{ は自然数}\},\quad Q = \{x \mid x \text{ は有理数}\}$$



命題 $p \Longrightarrow q$ は真である。すなわち，「x は自然数である $\Longrightarrow$ x は有理数である」が成り立つ。このことを集合を用いて表すと，「$x \in P \Longrightarrow x \in Q$」，すなわち，$P \subseteqq Q$ である。



一般に，全体集合 U の中で，条件 p, q を満たす要素の集合をそれぞれ P, Q とすると，次のように書ける。

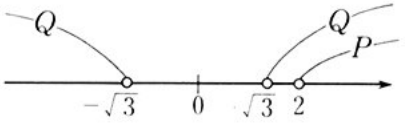
$$P = \{x \mid x \text{ は条件 } p \text{ を満たす}\},\quad Q = \{x \mid x \text{ は条件 } q \text{ を満たす}\}$$

このとき，命題 $p \Longrightarrow q$ が真であれば，「$x \in P \Longrightarrow x \in Q$」が成り立つ。すなわち，$P \subseteqq Q$ である。

逆に，$P \subseteqq Q$ すなわち，「$x \in P \Longrightarrow x \in Q$」が成り立つならば，$x$ が条件 p を満たすとき，x は条件 q も満たす。したがって，命題 $p \Longrightarrow q$ は真である。以上のことから，次のことがいえる。

「$p \Longrightarrow q$ が真」$\Longleftrightarrow$ $P \subseteqq Q$

例5 〉 命題「$x > 2$ ならば，$x^2 > 3$」の真偽は，集合 $P = \{x \mid x > 2\}$，$Q = \{x \mid x^2 > 3\}$ についての命題 $P \subseteqq Q$ の真偽に一致する。



したがって，命題「$x > 2$ ならば，$x^2 > 3$」は真である。

問6 集合を用いることによって，次の真偽を調べよ。

(1)　$x < -1$ ならば，$x^2 > 1$　　(2)　$|x| \leqq 2$ ならば，$|x+2| < 3$

命題 $p \Longrightarrow q$ が偽であることを示すには，p は成り立つが，q は成り立たない例を全体集合 U の中で見つければよい。そのような例を，命題 $p \Longrightarrow q$ の **反例** という。

例6 命題「3の倍数でない奇数は素数である」の反例について考えよう。

3の倍数でない奇数を，小さい順に並べると

$$1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, \cdots\cdots$$

であるが，たとえば，25は5で割りきれるから，素数でない。

したがって，25は上の命題の反例である。

問7 反例を見つけて，次の命題が偽であることを示せ。

(1)　$x^2 > 0 \Longrightarrow x > 0$

(2)　$l^2 + m^2 = n^2$ が成り立つような自然数 l, m, n は存在しない。

次のような例も命題である。

「$a < 1$ かつ $b < 1 \Longrightarrow a + b \geqq 2$ でない」

「$ab = 0 \Longrightarrow a = 0$ または $b = 0$」

これらの命題のように，2つの条件を“かつ”や“または”で結合したり，条件を“でない”で否定して，新しい条件をつくることができる。

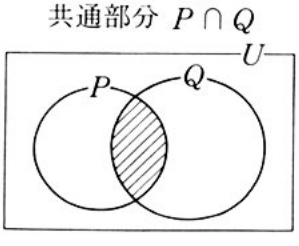
命題を集合を用いて調べたように，全体集合 U の2つの部分集合

$P = \{x \mid x$ は条件 p を満たす$\}$

$Q = \{x \mid x$ は条件 q を満たす$\}$

を考えてみよう。そのとき，条件「p かつ q」を満たす要素の集合は

$$P \cap Q$$

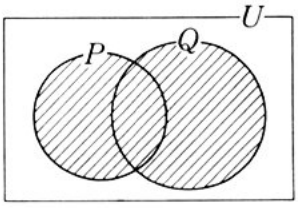


であり，条件「p または q」を満たす要素の集合は

$$P \cup Q$$

である。

和集合 $P \cup Q$

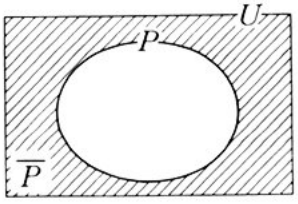


また，P の補集合 $\overline{P}$ は

$\overline{P} = \{x \mid x$ は条件 p を満たさない $\}$

と表せる。したがって，条件「p でない」を満たす要素の集合は $\overline{P}$ である。

補集合 $\overline{P}$



条件「p でない」を p の **否定** といい，$\overline{p}$ と書く。条件 $\overline{p}$ を満たす要素の集合は $\overline{P}$ である。

例7 ① 条件「$x > -1$」の否定は，「$x \leqq -1$」

② 条件「x は有理数である」の否定は，「x は無理数である」

問8 次の条件を p とするとき，条件 $\overline{p}$ を述べよ。

(1) x は負の数である　　(2) $x^2 > 4$　　(3) $-3 < x \leqq 5$

全体集合 U の部分集合 P, Q について，ド＝モルガンの法則

$$\overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q}, \quad \overline{P \cup Q} = \overline{P} \cap \overline{Q}$$

が成り立つ。これらを条件 p, q を用いて表すと，

$$\overline{p \text{ かつ } q} = \overline{p} \text{ または } \overline{q}, \quad \overline{p \text{ または } q} = \overline{p} \text{ かつ } \overline{q}$$

となる。これらもまた **ド＝モルガンの法則** という。

例8 ① 条件「$x > 0$ かつ $y > 0$」の否定は

「$x \leqq 0$ または $y \leqq 0$」

② 条件「$x \geqq 2$ または $y < 3$」の否定は

「$x < 2$ かつ $y \geqq 3$」

問9 次の条件の否定をいえ。

(1) $x = 2$ または $y \neq -1$　　(2) x も y も整数でない。

4 対偶と背理法

命題　　$p \Longrightarrow q$

の仮定と結論を入れかえた命題

$$q \Longrightarrow p$$

を，$p \Longrightarrow q$ の **逆** という。

ある命題が真であっても，その逆が真であるとは限らない。

例9 命題「$a > 2 \Longrightarrow a^2 > 4$」は真であるが，その逆

$$「a^2 > 4 \Longrightarrow a > 2」$$

は真でない。

問10 次の命題の逆を述べ，その真偽を調べよ。

(1) 整数 n が4の倍数ならば，n は偶数である。

(2) $x^3 - a$ が $x - 1$ で割りきれれば，$a = 1$ である。

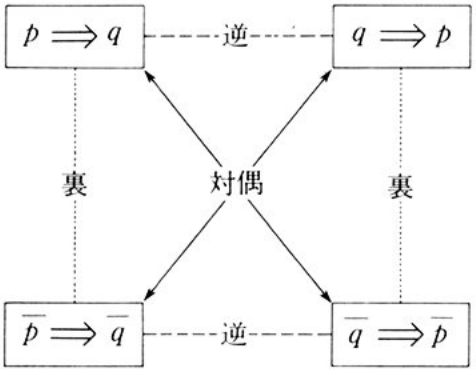
命題 $p \Longrightarrow q$ の仮定と結論をともにそれらの否定でおきかえた命題

$$\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$$

を $p \Longrightarrow q$ の **裏** といい，裏の逆

$$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$$

を $p \Longrightarrow q$ の **対偶** という。



命題 $p \Longrightarrow q$ の逆，裏，対偶の関係は，上の図のようになる。

例10 命題「$a \geqq 3 \Longrightarrow a^2 \geqq 3$」の裏は「$a < 3 \Longrightarrow a^2 < 3$」，対偶は「$a^2 < 3 \Longrightarrow a < 3$」である。

問11 命題「$a^2 \neq 1 \Longrightarrow a \neq 1$」の逆，裏，および対偶をいえ。また，そのうち，真であるものはどれか。

対偶についても103ページと同様に，集合を用いて考えてみよう。

命題と集合の関係から，

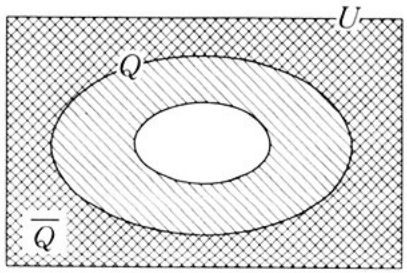
$$「p \Longrightarrow q \text{ が真}」 \Longleftrightarrow P \subseteqq Q$$

$$「\overline{q} \Longrightarrow \overline{p} \text{ が真}」 \Longleftrightarrow \overline{Q} \subseteqq \overline{P}$$

であるが，右の図からもわかるように

$$P \subseteqq Q \Longleftrightarrow \overline{Q} \subseteqq \overline{P}$$

である。したがって，対偶 $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ は，もとの命題 $p \Longrightarrow q$ と真偽が一致するから，$p \Longrightarrow q$ が真であることを証明したいとき，そのかわりに，対偶 $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ が真であることを証明してもよい。



命題とその対偶

「命題 $p \Longrightarrow q$ が真」$\Longleftrightarrow$「対偶 $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ が真」

例題2 n を自然数とする。n^2 が偶数であれば，n も偶数であることを証明せよ。

証明 命題「n^2 が偶数であれば，n は偶数である」の対偶は

「n が奇数であれば，n^2 は奇数である」

となる。n が奇数のとき，n はある自然数 m を用いて

$$n = 2m - 1$$

と表すことができる。両辺を2乗すると

$$n^2 = 4(m^2 - m) + 1$$

$4(m^2 - m)$ は偶数であるから，$4(m^2 - m) + 1$ すなわち n^2 は奇数である。したがって，命題の対偶は真である。

ゆえに，命題は真である。

問12 自然数 n について，n^2 が奇数であれば，n も奇数であることを証明せよ。

また，命題 $p \Longrightarrow q$ が真であることをいうには，「仮定 p が成り立ち，結論 q が成り立たないとすれば，不合理を生じる」ことを証明してもよい。このような証明法を **背理法** という。

例題3 $\sqrt{2}$ は無理数であることを証明せよ。

証明 $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると，たがいに素である自然数 a, b によって，$\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ と既約分数の形に書ける。

両辺を2乗して分母を払うと

$$2b^2 = a^2$$

したがって，a^2 は偶数であるから a も偶数で，ある自然数 c によって，$a = 2c$ と書ける。

よって　　$b^2 = 2c^2$

これから，b^2 は偶数となり，b も偶数である。

よって，a, b はともに2の倍数となり，a, b がたがいに素でなく，$\dfrac{a}{b}$ が既約分数ということに反する。

ゆえに，$\sqrt{2}$ は無理数でなければならない。

問 13 有理数と無理数の和は無理数になることを，背理法を用いて証明せよ。

練習問題

1. 次の命題について，真であれば証明し，偽であれば反例をあげよ。

(1) 二等辺三角形は，つねに鋭角三角形である。

(2) $x^3 > 1 \Longrightarrow x > 1$　　(3) 「n は自然数である」$\Longrightarrow n^2 \geqq 2^n$

2. 次の条件の否定をいえ。

(1) 自然数 n は3で割りきれる。　　(2) 実数 x は無理数である。

3. 命題「$a + b > 2$ ならば，$a > 1$ または $b > 1$ である」を，背理法を用いて証明せよ。

第4章の問題

A

1. 次の等式を証明せよ。

(1) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=(b-a)(c-b)(a-c)$

(2) $a+b+c=0$ のとき，$a^2-b^2+ac-bc=0$

2. 次の等式が x についての恒等式となるように，a, b, c の値を定めよ。

(1) $(x+3)^3+a(x+3)^2+b(x+3)+c=x^3$

(2) $\dfrac{2x^2-3x+4}{x(x-1)^2}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{(x-1)^2}$

3. $x>0, y>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。

(1) $(1+x)(1+y)>1+xy$　　(2) $\sqrt{xy}\geqq\dfrac{2xy}{x+y}$

(3) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geqq\dfrac{4}{x+y}$

4. 次の命題が真であれば証明し，偽であれば反例を示せ。

(1) $x^2-3x-4=0$ であれば，$|x|\leqq 7$ である。

(2) 平方すれば，-1 となるような複素数が存在する。

(3) 自然数 m, n について，mn が偶数ならば，m も n も偶数である。

5. 次のおのおのの □ に「必要」，「十分」，「必要十分」のうち，最も適切なものを入れよ。

(1) a が有理数であることは，a^2 が有理数であるための □ 条件

(2) $a\leqq 0$ は，$x^2+a=0$ が実数解をもつための □ 条件

(3) $a^2-1>0$ であることは，$a>1$ であるための □ 条件

(4) $b>0$ は，2次方程式 $x^2+ax+b=0$ が2つの負の実数解をもつための □ 条件

6. 次の命題を背理法を用いて証明せよ。

(1) $x+y\neq 0$ ならば，$x\neq 0$ または $y\neq 0$ である。

(2) $x\neq 3$ かつ $x\neq 4$ ならば，$x^2-7x+12\neq 0$ である。

B

1. 次の等式を証明せよ。

(1) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

(2) $\dfrac{a}{(a-b)(c-a)}+\dfrac{b}{(b-c)(a-b)}+\dfrac{c}{(c-a)(b-c)}=0$

2. $\dfrac{x}{b-c}=\dfrac{y}{c-a}=\dfrac{z}{a-b}$ のとき，次の等式を証明せよ。

$$x+y+z=0$$

3. a, b, c, d が正の数で，$\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$ のとき，次の不等式を証明せよ。

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$

4. 次の命題が，真であれば証明し，偽であれば反例を示せ。

(1) 実数 a, b, c について，$a>\dfrac{b+c}{2}$ かつ $\dfrac{a+c}{2}>b$ であれば，$a>b$ である。

(2) a, b を無理数とするとき，$a+b$ と ab の少なくとも一方は無理数である。

5. 次の条件の否定をいえ。

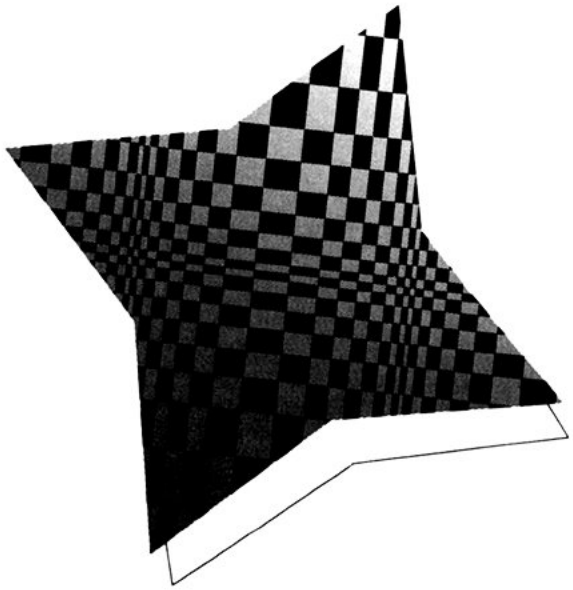
(1) $x=1$ かつ $y\leqq 4$　　(2) 自然数 n は素数でない。

6. 次の命題を背理法を用いて証明せよ。

(1) 有理数 a について，a^2 が整数でなければ，a も整数ではない。

(2) a^2 が無理数ならば，a も無理数である。

(3) 自然数 n について，$2^n>250$ であれば，$n>7$ である。



第5章 関数

1節・関数とそのグラフ
2節・2次関数とそのグラフ
3節・2次関数の最大と最小
4節・2次関数と方程式・不等式
5節・分数関数とそのグラフ
6節・無理関数とそのグラフ
7節・逆関数とそのグラフ

古代の数学や天文学では，運動や変化という形で関数の考えがあった。また，中世では，時間の関数としての量の変化やグラフ表示の芽ばえがみられた。

17世紀になり，デカルトが座標を導入し，ライプニッツが関数という言葉にはじめて定義を与えることによって，関数についての数学である解析学が急速に発展した。17世紀から18世紀においては，関数は変数を含む式で表されるものと考えられたが，19世紀になり，コーシーがそれまでの関数の概念を一新させ，1つの変数と他の変数との値の対応として，今日に近い関数の定義を与えた。

その後，関数の概念は，集合論などの影響を受けて，より精密化され一般化されて，数学において不可欠の基礎的概念となった。

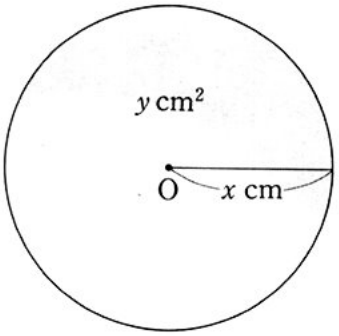
〖1節〗関数とそのグラフ

1 変数と関数

半径が x cm の円 O の面積を y cm^2 とすると，x と y の間には

$$y = \pi x^2$$

という関係が成り立つ。



上の式で，x に任意の正の値を与えると，それに対応して y の値が1つだけきまる。この式の x や y のように，いろいろな値をとることのできる文字を**変数**という。

上のように，2つの変数 x, y があって，x の値をきめると，それに対応して y の値が1つだけきまるとき，y は x の**関数**であるという。また，このとき，x を**独立変数**といい，y を**従属変数**という。

一般に，y が x の関数であることを

$$y = f(x),\quad y = g(x)$$

などと表す。たとえば，上の関数は，$f(x) = \pi x^2$ のように書ける。

関数 $y = f(x)$ について，$x = a$ に対応してきまる y の値を $x = a$ における**関数の値**といい，$f(a)$ と書く。たとえば関数が

$$f(x) = \pi x^2,\quad g(x) = 2x^2 + 4$$

のとき，$x = 2$ における関数の値は，それぞれ次のようになる。

$$f(2) = 4\pi,\quad g(2) = 2 \times 2^2 + 4 = 12$$

問1 》 $f(x) = x^2 - 3x + 5$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $f(0)$　　(2) $f(2)$　　(3) $f(-4)$　　(4) $f(-a)$

2 定義域と値域

関数 $y = f(x)$ において，独立変数 x のとりうる値の集合を，この関数の **定義域** という。関数 $y = f(x)$ の定義域が $\{x \mid a \leqq x \leqq b\}$ であるとき，このことをはっきり示すために，次のように書く。

$$y = f(x) \quad (a \leqq x \leqq b)$$

例1 〉 円の面積を表す関数 $y = \pi x^2$ の定義域は正の実数全体の集合 $\{x \mid x > 0\}$ であるから，この関数は次のように表される。

$$y = \pi x^2 \quad (x > 0)$$

定義域が示されていない関数 $y = f(x)$ では，関数の定義域を $f(x)$ が意味をもつような x の値全体の集合とするのがふつうである。

例2 〉 関数 $y = \dfrac{1}{x}$ の定義域は　$\{x \mid x \neq 0\}$

問2 〉 次の関数の定義域をいえ。

(1) $y = -x + 3$　　(2) $y = 2x^2 - 1$

(3) $y = \dfrac{2}{x} + 1$　　(4) $y = \dfrac{1}{x^2}$

関数 $y = f(x)$ について，従属変数 y のとりうる値の集合，すなわち，独立変数 x が定義域内にあるすべての値をとるときの関数の値全体の集合を，この関数の **値域** という。

例3 〉 ① 関数 $y = \pi x^2$ $(x > 0)$ の値域は　$\{y \mid y > 0\}$

② 関数 $y = x + 1$ $(2 \leqq x \leqq 5)$ の値域は

$$\{y \mid 3 \leqq y \leqq 6\}$$

③ 関数 $y = x^2$ の値域は　$\{y \geqq 0\}$

問3 〉 次の関数の値域を求めよ。

(1) $y = x - 1$ $(x \geqq 1)$　　(2) $y = 2x - 2$ $(2 \leqq x < 4)$

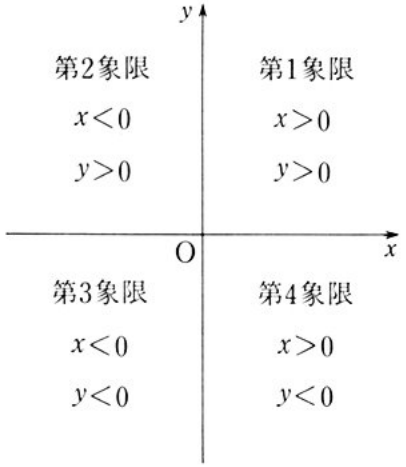
(3) $y = -x^2$ $(0 \leqq x \leqq 1)$　　(4) $y = 3x^2 + 1$

3 座標平面と関数のグラフ

平面上に原点Oとx軸，y軸すなわち座標軸を定めると，各点の座標はxとyを用いて，$(x,\ y)$で表される。このように，座標軸が定められている平面を**座標平面**という。x座標がa，y座標がbである点Pを，$\mathbf{P}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$と書く。

座標平面は座標軸によって4つの部分に分けられる。これらの部分を右の図のように，時計回りと逆の順序で，それぞれ**第1象限，第2象限，第3象限，第4象限**という。

ただし，座標軸上の点は，どの象限にも属さないものとする。



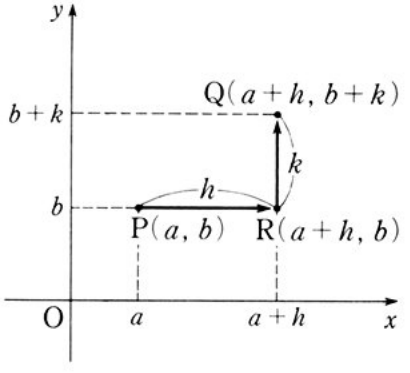
問4 次の各点は，座標平面のどの象限に属するかをいえ。

A$(2,\ -3)$,　B$(-5,\ 4)$,　C$(1,\ 2)$,　D$\left(-\frac{3}{2},\ -2\right)$

座標平面上の2つの点の位置関係を考えてみよう。

点$\mathrm{P}(a,\ b)$が，x軸に平行にhだけ移動した点Rの座標は$(a+h,\ b)$である。このとき，点Rのことを，点Pをx軸方向にhだけ平行移動した点という。

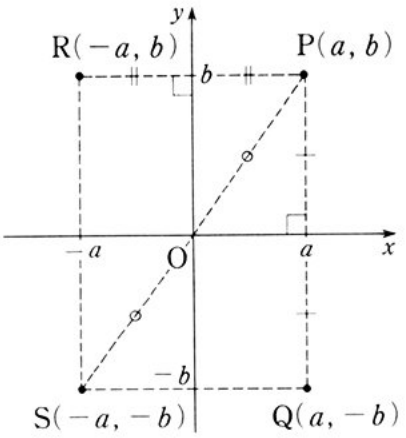
次に，Rがy軸に平行にkだけ移動した点Qの座標は$(a+h,\ b+k)$であり，点Qのことを，点Rをy軸方向にkだけ平行移動した点という。



問5 点$\mathrm{P}(-1,\ 5)$をx軸方向に-3，さらにy軸方向に5だけ平行移動して点Qに移ったとき，点Qの座標を求めよ。

一方，点$\mathrm{P}(a,\ b)$に対して，Pのx軸に関する対称な点Qの座標

は $(a, -b)$ となる。また，Pの y 軸に関する対称な点Rの座標は $(-a, b)$ であり，Pの原点Oに関する対称な点Sの座標は $(-a, -b)$ となる。



問6 》 点 $P(2, -6)$ の x 軸，y 軸，および原点Oのそれぞれに関しての対称な点の座標を求めよ。

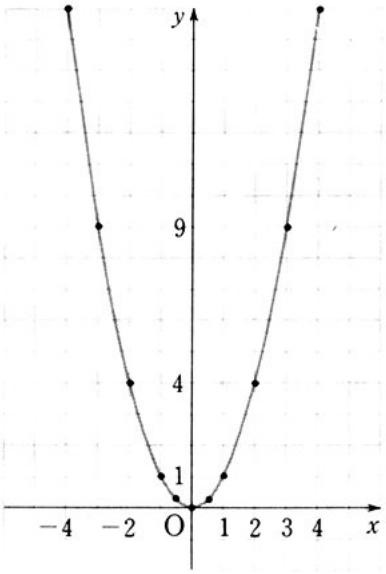
関数 $y = x^2$ について，x とそれに対応する y の値の組を点 (x, y) として座標平面上にとってみよう。まず，これらの点を表す x と y の対応表を作ると，次のようになる。

x	…	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	…
y	…	16	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9	16	…

x と y の対応表をもとに，$y = x^2$ のグラフをえがくと，右の図のようになる。このグラフは，座標平面上にとった点 (x, y) の集合

$$\{(x, y) \mid y = x^2\}$$

として表される。



一般に，定義域を $\{x \mid a \leqq x \leqq b\}$ とする関数 $y = f(x)$ について，座標平面上にとった点 $(x, f(x))$ の集合

$$\{(x, y) \mid y = f(x), \quad a \leqq x \leqq b\}$$

を，この **関数のグラフ** という。

問7 》 次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y = 2x - 1 \ (x > 0)$　　(2)　$y = x^2 \ (x < 1)$

〖2節〗2次関数とそのグラフ

x の関数 y が，次のように，x の2次式で表されるとき，y は x の**2次関数**であるという。

$$y = 3x^2,\quad y = 2x^2 - x,\quad y = -x^2 + 5x - 4$$

2次関数は，a, b, c を実数の定数，$a \neq 0$ として，一般に

$$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$$

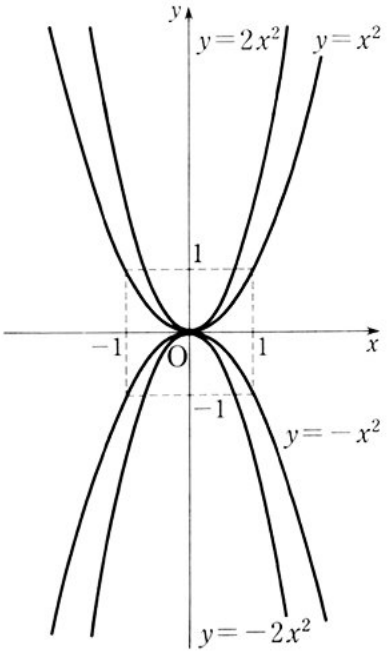
の形で表される。

2次関数のうち，中学校では $y = ax^2$ とそのグラフについて学んだ。それを復習しながら，一般の2次関数について調べてみよう。

1 $y = ax^2$ のグラフ

$y = ax^2$ のグラフは，原点を通り，y 軸に関して対称な曲線となる。この曲線を**放物線**という。

右の図は，a の値がそれぞれ 1，2，-1 および -2 のときの関数 $y = ax^2$ のグラフである。



$a > 0$ のときには，x の絶対値が大きくなるにつれて，y の値は限りなく大きくなる。

$a < 0$ のときには，y の値はつねに負であって，x の絶対値が大きくなるにつれて，y の絶対値も限りなく大きくなる。

一般に，放物線は，対称の軸をもっている。その対称の軸を放物線の **軸**，軸と放物線の交点を放物線の **頂点** という。放物線 $y = ax^2$ の軸は y 軸，すなわち直線 $x = 0$，頂点は原点である。

また，放物線 $y = ax^2$ は，

$a > 0$ のとき，**下に凸** の放物線，$a < 0$ のとき，**上に凸** の放物線という。

問1 》 $y = ax^2$ の定数 a がそれぞれ次の値のときのグラフをかけ。

$$3,\quad -3,\quad \frac{2}{3},\quad -\frac{2}{3},\quad \frac{1}{3},\quad -\frac{1}{3}$$

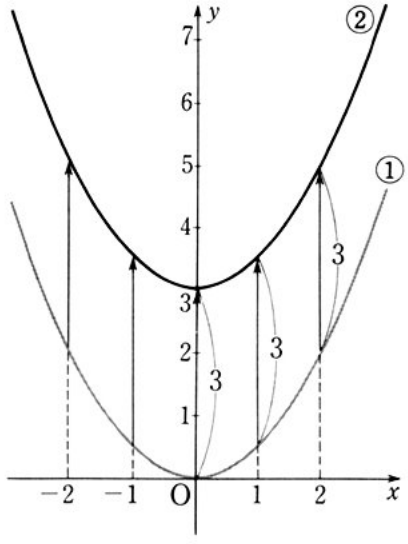
2 $y = ax^2 + c$ のグラフ

2つの2次関数

$$y = \frac{1}{2}x^2 \qquad ①$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 3 \qquad ②$$

のグラフを比べてみよう。



同じ x の値に対して，② の y の値は ① の y の値よりもつねに3だけ大きいから，2つの関数のグラフは右の図のようになる。したがって，② のグラフは，① のグラフを y 軸方向に3だけ平行移動したものとなる。このことから，放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ の軸は y 軸，頂点の座標は $(0, 3)$ になることがわかる。

問2 》 $y = -\frac{1}{2}x^2$ と $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ のグラフをかいて比べてみよ。

2次関数 $y = ax^2 + c$ のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを，y 軸方向に c だけ平行移動したもの，すなわち，放物線の頂点が座標 $(0, c)$ に

なるように平行移動したものである。

問3 次の関数のグラフをかき，頂点の座標を求めよ。

(1)　$y = -3x^2 + 2$　　(2)　$y = -\frac{3}{2}x^2 - 4$

3 $y = a(x-p)^2$ のグラフ

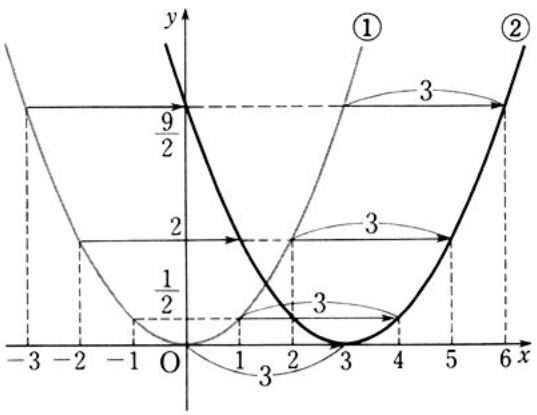
2つの2次関数　$y = \frac{1}{2}x^2$　①

$y = \frac{1}{2}(x-3)^2$　②

のグラフについて調べてみよう。①と②について，x とそれに対応する y の値を求めると，次の表のようになる。

x	…	-2	-1	0	1	2	3	4	5	…
$\frac{1}{2}x^2$	…	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8	$\frac{25}{2}$	…
$\frac{1}{2}(x-3)^2$	…	$\frac{25}{2}$	8	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	…

表から，②の y の値は，①の y の値を x 軸方向に3だけ移したものである。



したがって，②のグラフは，①のグラフを x 軸方向に3だけ平行移動したものである。このことから，放物線 $y = \frac{1}{2}(x-3)^2$ の軸は直線 $x = 3$，頂点の座標は $(3, 0)$ になることがわかる。また，y 軸との交点は $\left(0, \frac{9}{2}\right)$ である。

問4 $y = -\frac{1}{2}x^2$ と $y = -\frac{1}{2}(x-3)^2$ のグラフをかいて比べよ。

2次関数 $y = a(x - p)^2$ のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動したものであり，このとき，放物線の軸は $x = p$，頂点の座標は $(p, 0)$ である。

問5 次の関数のグラフをかき，軸を表す式と頂点の座標を求めよ。

(1) $y = 2(x - 4)^2$　　(2) $y = -\frac{2}{3}(x + 5)^2$

4 $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフ

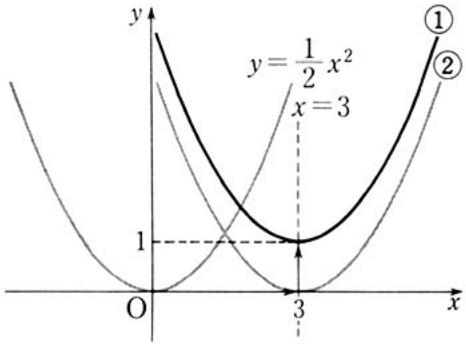
いままでに学んだことから，

$$y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 1 \qquad ①$$

のグラフは，次のようになる。

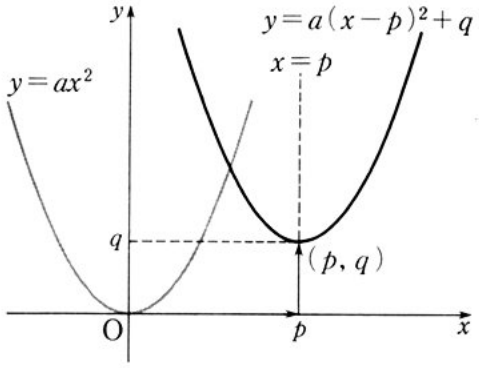
まず，$y = \frac{1}{2}x^2$ のグラフを x 軸方向に3だけ平行移動させると，

$$y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 \qquad ②$$



のグラフになり，さらに，② を y 軸方向に1だけ平行移動させると，① のグラフが得られる。したがって，① の放物線の軸は直線 $x = 3$，頂点の座標は $(3, 1)$ である

$y = a(x - p)^2 + q$ のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを右の図のように平行移動させたものである。



$y = a(x - p)^2 + q$ のグラフ

2次関数 $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動させた放物線であり，その軸は直線 $x = p$，頂点の座標は (p, q) である。

問6 次の関数のグラフをかき，軸を表す式と頂点の座標を求めよ。

(1)　$y = 2(x+1)^2 - 3$　　(2)　$y = -\frac{1}{3}(x-4)^2 + 7$

問7 $y = 2(x-1)^2$ のグラフを平行移動して，頂点が次の座標になるとき，その関数の式を求めよ。

(1)　$(-3, 4)$　　(2)　$(1, -5)$　　(3)　$(-1, -6)$

5 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフ

2次関数

$$y = 2x^2 - 8x + 5$$

のグラフをかくとき，この関数を

$$y = 2(x-2)^2 - 3$$

という形に変形すれば，軸を表す式と頂点の座標が簡単に求められるので，グラフは容易にかけるようになる。

例題1 2次関数 $y = -5x^2 + 10x - 1$ のグラフをかけ。

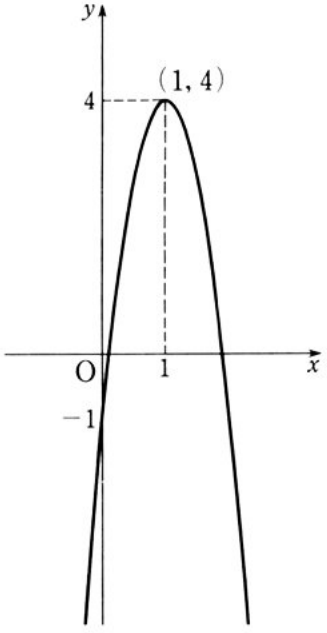
解　$y = -5x^2 + 10x - 1$

$= -5(x^2 - 2x) - 1$

$= -5(x^2 - 2x + 1) + 5 - 1$

$= -5(x-1)^2 + 4$

したがって，与えられた2次関数のグラフは，軸が直線 $x = 1$，頂点の座標が $(1, 4)$ で，上に凸の右の図のような放物線である。



問8 次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y = x^2 - 4x + 5$

(2)　$y = -2x^2 - 8x - 7$

(3)　$y = \frac{1}{3}x^2 + 2x - 1$

一般に，2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ は，右辺を変形して整理すると，

$$y = ax^2 + bx + c$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

と表されるから，そのグラフについて次のようにまとめられる。

$y = ax^2 + bx + c$ のグラフ

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを x 軸方向に $-\frac{b}{2a}$，y 軸方向に $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ だけ平行移動させた放物線である。放物線の軸は直線 $x = -\frac{b}{2a}$，頂点の座標は $\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ である。

問9 》 次の放物線の軸を表す式と頂点の座標を求めよ。また，それぞれの放物線は上に凸であるか，下に凸であるかをいえ。

(1) $y = x^2 - 6x + 5$　　(2) $y = -x^2 + 8x - 10$

練習問題

1. 次の関数のグラフをかき，軸を表す式と頂点の座標を求めよ。

(1) $y = 4(x + 2)^2 - 5$　　(2) $y = 3x^2 - 18x + 28$

(3) $y = -3x^2 + 5x$　　(4) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{11}{2}$

2. 関数 $y = 2x^2$ のグラフを次のように平行移動させる。そのときのそれぞれの関数のグラフを書き，その式を求めよ。

(1) x 軸方向に $\frac{1}{2}$，y 軸方向に $-\frac{3}{2}$

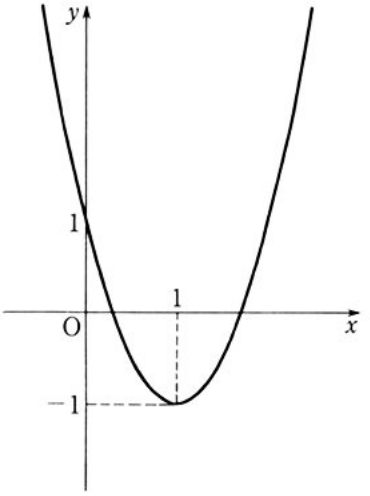
(2) x 軸方向に $-\frac{1}{2}$，y 軸方向に 3

〖3節〗2次関数の最大と最小

2次関数 $y = 2x^2 - 4x + 1$ は，

$$y = 2(x - 1)^2 - 1$$

と変形される。関数のグラフは，軸が直線 $x = 1$，頂点の座標が $(1, -1)$ で，下に凸の右の図のような放物線である。x の値が増加するにつれて，y の値は次のように変化する。



$x < 1$ の範囲では減少し，

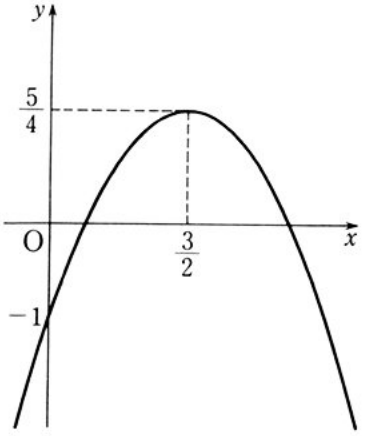
$x > 1$ の範囲では増加する。

したがって，$x = 1$ のとき，y の値は最小となり，最小値は -1 である。また，x が x 軸上を1から限りなく遠ざかるにつれて，y の値は限りなく大きくなるから，y の最大値はない。

また，2次関数 $y = -x^2 + 3x - 1$ は，

$$y = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

と変形され，上に凸の放物線である。



したがって，$x = \frac{3}{2}$ のとき，y の値は最大となり，最大値は $\frac{5}{4}$ である。また，右の図より y の最小値はない。

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ は，

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

と変形されるから，2次関数の最大値または最小値は，グラフを用いると求めやすい。

2次関数の最大・最小

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ について，次のことがいえる。

(1)　$a > 0$ ならば，$x = -\dfrac{b}{2a}$ のとき，

y は最小値 $-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ をとる。y の最大値はない。

(2)　$a < 0$ ならば，$x = -\dfrac{b}{2a}$ のとき，

y は最大値 $-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ をとる。y の最小値はない。

問1 次の関数の最大値または最小値を求めよ。また，そのときの x の値を示せ。

(1)　$y = x^2 - 8x + 11$　　(2)　$y = -x^2 - 3x - 1$

(3)　$y = x(1 - x)$　　(4)　$y = 2x^2 - 12x + 8$

例題1 定義域を $-1 \leqq x \leqq 2$ とするとき，2次関数 $y = 2x^2 - 4x - 1$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を示せ。

解 $y = f(x)$ とおくと，

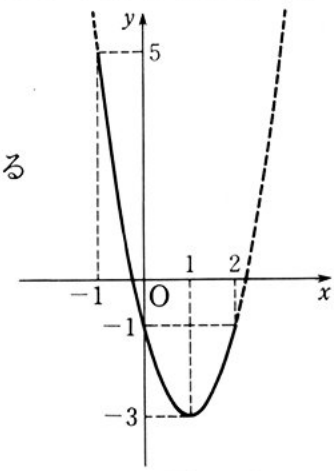
$$f(x) = 2(x - 1)^2 - 3$$

$x = 1$ は定義域 $-1 \leqq x \leqq 2$ に属するので，最小値は $f(1) = -3$ である。

$f(-1)$ と $f(2)$ を比べれば，

$f(-1) > f(2)$ なので，最大値は

$f(-1) = 5$ である。



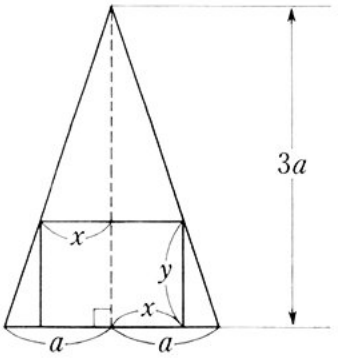
ゆえに，$x = -1$ のとき最大値 5，$x = 1$ のとき最小値 -3

問2 定義域を $-1 \leqq x \leqq 2$ とするとき，次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を示せ。

(1)　$y = x(1 - 2x)$　　(2)　$y = \dfrac{1}{6}x^2 - x + 2$

例題2 下の図のように，底面の半径が a，高さが $3a$ である円すいの内部にあって，円すいと軸を共有し，表面積が最大となる円柱を作りたい。そのときの円柱の底面の半径と高さを求めよ。

解 円柱の底面の半径を x，高さを y とし，表面積を S とする。



三角形の相似より

$$x : a = (3a - y) : 3a$$

これから　　$y = 3(a - x)$

したがって

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi xy = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot 3(a - x)$$

$$= -4\pi x^2 + 6\pi ax = -4\pi\left(x - \frac{3}{4}a\right)^2 + \frac{9}{4}\pi a^2$$

定義域は $0 < x < a$ であるから，$x = \frac{3}{4}a$ のとき S は最大である。また，そのときの y の値は $\frac{3}{4}a$ となる。

ゆえに，円柱の底面の半径と高さはともに $\frac{3}{4}a$ である。

問3 直角をはさむ2辺 a, b の和が 12 cm の直角三角形について，その面積が最大となるときの a, b の関係，および，斜辺の長さが最小となるときの a, b の関係を求めよ。

《練習問題》

1. 定義域を $1 \leqq x \leqq 4$ とするとき，$y = x^2 - 4x + 6$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を示せ。

2. 定義域を $-1 \leqq x \leqq 3$ とするとき，$y = x^2 - 4x + b$ の最大値が 7 となるような b の値を求めよ。

3. 長さ 20 cm の針金を折りまげて，長方形を作るとき，面積が最大となるような2辺の長さを求めよ。

〖4節〗2次関数と方程式・不等式

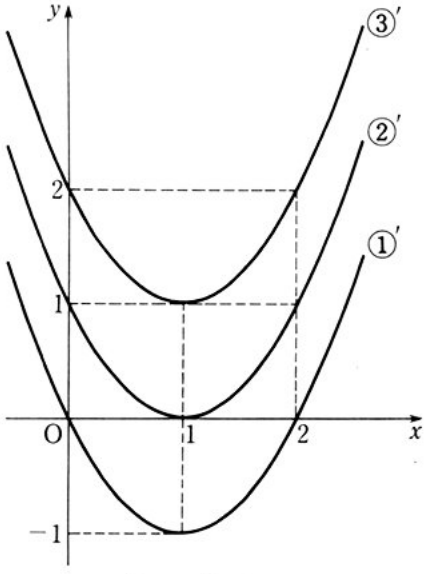
1 2次関数のグラフと2次方程式

次の3つの方程式を例にして，2次関数のグラフと x 軸との共有点の有無から，2次方程式の解について調べてみよう。

$x^2 - 2x = 0$　　すなわち　　$(x-1)^2 - 1 = 0$　　①

$x^2 - 2x + 1 = 0$　すなわち　　$(x-1)^2 = 0$　　②

$x^2 - 2x + 2 = 0$　すなわち　　$(x-1)^2 + 1 = 0$　　③



① は，判別式の値 $D = 4$ が正であるから，2つの異なる実数解をもつ。2次関数 $y = (x-1)^2 - 1$ のグラフは右の図の ①′ であり，x 軸との共有点の x 座標 0, 2 が方程式

$$x^2 - 2x = 0$$

の2つの実数解である。

② は，判別式の値が0であるから重複解をもつ。2次関数 $y = (x-1)^2$ のグラフは上の図の ②′ である。このとき，グラフは x 軸に **接する** といい，x 軸とグラフとの共有点を **接点** という。この接点の x 座標1が方程式

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

の重複解となっている。

③ は，判別式の値 $D = -4$ が負であるから，2つの異なる虚数解をもつ。2次関数 $y = (x-1)^2 + 1$ のグラフは，図の ③′ である。このグラフが x 軸と共有点をもたないことから，方程式

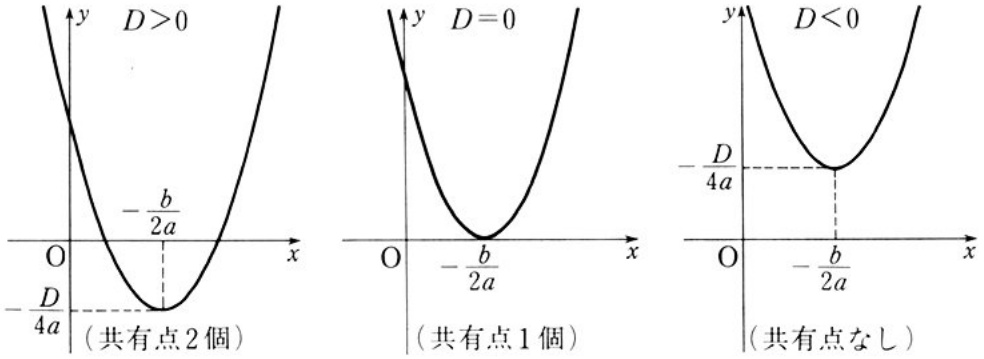
$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

は実数解をもたないことがわかる。

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ は，2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式 $D = b^2 - 4ac$ を用いると，一般に

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$$

と変形できる。したがって，$a > 0$ のときには，2次関数のグラフは，D の値の正，0，負により，それぞれ次のようになる。



問1 》 $a < 0$ のときには，$y = ax^2 + bx + c$ のグラフは，D の値の正，0，負によって，それぞれどうなるかを調べよ。

問2 》 次の関数のグラフと x 軸との共有点の個数を求めよ。

(1) $y = 2x^2 - 5x + 3$　　(2) $y = -5x^2 + 4x - 1$

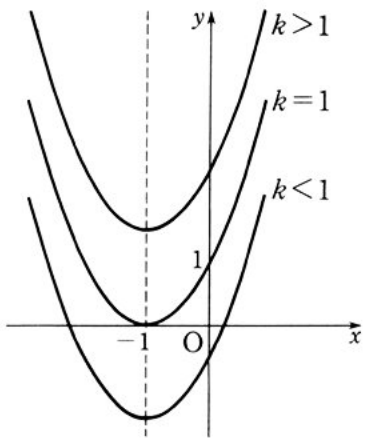
(3) $y = 2(x + 1)(x - 1) + 3$　　(4) $y = 2(x - 1)(x - 5) + 8$

例題1 》 放物線 $y = x^2 + 2x + k$ と x 軸との共有点の個数は，k の値によってどのように変わるか。

解 》 放物線 $y = x^2 + 2x + k$ と x 軸とが共有点をもつのは，2次方程式 $x^2 + 2x + k = 0$ が実数解をもつとき，すなわち $D \geqq 0$ のときである。

$$D = 2^2 - 4k \geqq 0$$

よって　　$k \leqq 1$



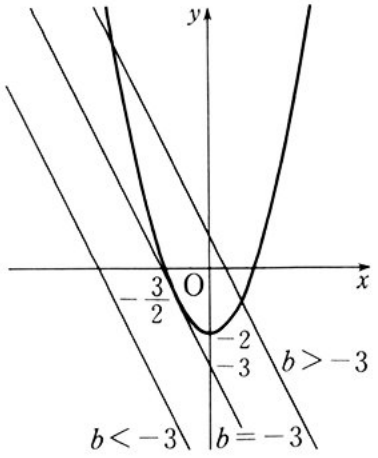
ゆえに，x 軸との共有点の個数は，$k<1$ のとき2個，$k=1$ のとき1個であり，$k>1$ のときは共有点がない。

問3 次の放物線と x 軸とが共有点をもつとき，k の値の範囲を求めよ。

(1)　$y=2x^2-5x+k$　　(2)　$y=x^2+kx+1$

放物線と x 軸，すなわち，直線 $y=0$ との共有点の場合と同様に考えて，放物線と直線 $y=ax+b$ との共有点について調べてみよう。

例題2 放物線 $y=x^2-2$ と直線 $y=-2x+b$ とが共有点をもつとき，b の値の範囲を求めよ。



解 共有点の座標は，連立方程式

$$\begin{cases} y=x^2-2 \\ y=-2x+b \end{cases}$$

の実数解である。したがって，y を消去して得られる2次方程式

$$x^2+2x-(2+b)=0$$

の実数解が共有点の x 座標である。この式の判別式を D として

$$D=2^2+4(2+b)=12+4b \geqq 0$$

ゆえに，$b \geqq -3$ のとき共有点をもつ。

問4 放物線 $y=x^2+4$ と次の直線とが共有点をもつとき，a または b の値の範囲をそれぞれ求めよ。

(1)　$y=2x+b$　　(2)　$y=ax+3$

2 2次関数のグラフと2次不等式

2次不等式の解き方は，2次関数のグラフを用いると，さらに理解を深めることができる。

次の3つの不等式を例にして考えてみよう。

$x^2 - 2x > 0$　　すなわち　$(x-1)^2 - 1 > 0$　①

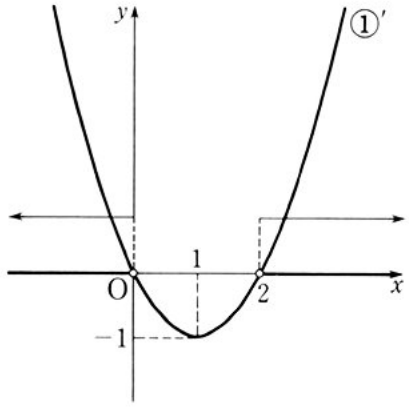
$x^2 - 2x + 1 > 0$　　すなわち　$(x-1)^2 > 0$　②

$x^2 - 2x + 2 > 0$　　すなわち　$(x-1)^2 + 1 > 0$　③

2次関数

$$y = x^2 - 2x$$

のグラフは，右の図の①′である。

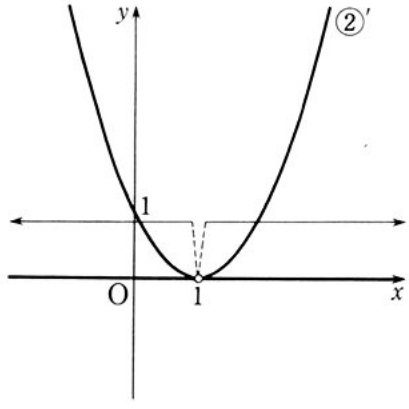


$$x^2 - 2x > 0$$

の解は，このグラフの $y > 0$ である x の値の範囲を求めればよい。それは2次方程式　$x^2 - 2x = 0$ の2つの実数解 0, 2 の間を数直線から除いた範囲である。したがって，不等式①の解は

$$x < 0 \quad \text{または} \quad x > 2$$

である。

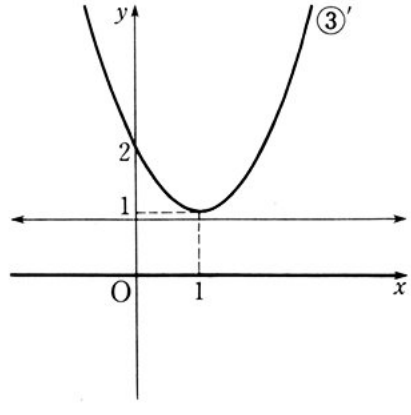


2次関数

$$y = x^2 - 2x + 1$$

のグラフは，右の図の②′である。

グラフは，x 軸との接点 (1, 0) 以外は，x 軸の上方にある。したがって，不等式②の解は，1以外の実数全体である。



2次関数

$$y = x^2 - 2x + 2$$

のグラフは，右の図の③′である。

グラフは，x のすべての範囲で x 軸の

上方にある。したがって，この不等式③の解は実数全体である。

問5 次の不等式を解け。

(1)　$x^2 - 2x < 0$　　(2)　$-x^2 + 2x < 0$

(3)　$x^2 - 6x + 14 > 0$　　(4)　$x^2 - 5x - 4 < 0$

例題3 $a \neq 0$ とするとき，すべての実数 x について，不等式

$$ax^2 + bx + c > 0$$

が成り立つための必要十分条件を求めよ。

解 $y = ax^2 + bx + c$ とすると，x のすべての値について $y > 0$ であるような必要十分条件を求めればよい。これは，2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが

下に凸で，x 軸と共有点をもたない

ことと同値である。ゆえに，求める必要十分条件は

$$a > 0 \quad \text{かつ} \quad b^2 - 4ac < 0$$

問6 $a \neq 0$ とするとき，すべての実数 x について，不等式

$$ax^2 + bx + c < 0$$

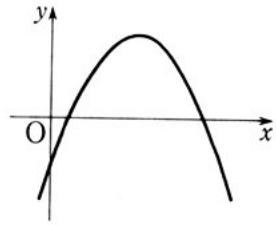
が成り立つための必要十分条件を求めよ。

練習問題

1. 2次関数 $y = x^2 + 3x + k$ が，x 軸と共有点をもたないような k の値の範囲を求めよ。

2. 2次関数 $y = x^2 - 2x - 1$ が，直線 $y = ax - 4$ と共有点をもつとき，a の値の範囲を求めよ。

3. 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが，右の図のように表されたとき，次のものを求めよ。



(1)　a, b, c の符号

(2)　$b^2 - 4ac$，$a - b + c$ の符号

〖5節〗 分数関数とそのグラフ

x の関数 y が，次のように，x の分数式で表されるとき，y は x の **分数関数** であるという。

$$y = \frac{2}{x}, \qquad y = \frac{3}{x+1}, \qquad y = \frac{2x+1}{x-3}$$

分数関数では，分母を 0 にする x の値は，その定義域に属さない。したがって，上の分数関数の定義域は，それぞれ

$$\{x \mid x \neq 0\}, \quad \{x \mid x \neq -1\}, \quad \{x \mid x \neq 3\}$$

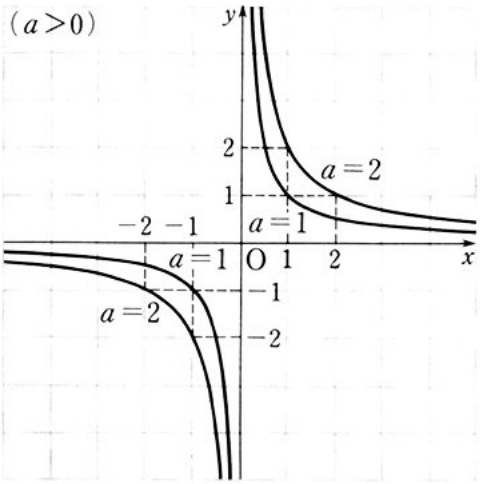
である。

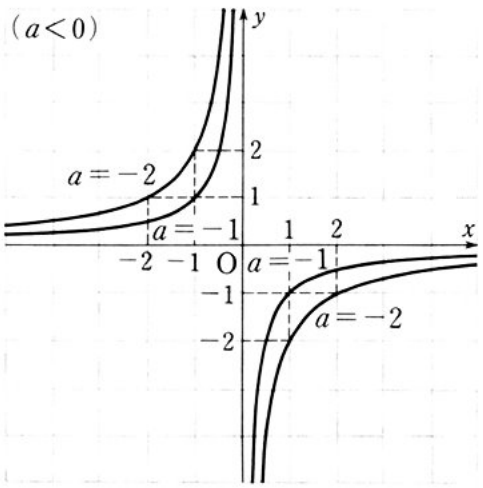
1 $y = \frac{a}{x}$ のグラフ

分数関数 $y = \frac{a}{x}$ は反比例の関係を表す。$y = \frac{a}{x}$ のグラフは座標平面で 2 つの部分に分かれ，**直角双曲線** とよばれる。

$a > 0$ のときは，グラフは第 1 象限と第 3 象限にあり，

$a < 0$ のときは，グラフは第 2 象限と第 4 象限にある。





$a > 0$, $a < 0$ のいずれの場合にも，グラフ上の点は，

原点から左右の方向に遠ざかるにつれて，x 軸に近づいていき，

原点から上下の方向に遠ざかるにつれて，y 軸に近づいていく。

このように，曲線上の点が，原点から遠ざかるにつれて，ある直線に限りなく近づくとき，この直線を曲線の**漸近線**（ぜんきん）という。

$y = \frac{a}{x}$ のグラフは，x 軸と y 軸を漸近線とする直角双曲線であり，原点に関して対称である。

問1 》 同じ座標軸を用いて，$y = \frac{3}{x}$ および $y = -\frac{1}{2x}$ のグラフをかけ。

問2 》 y が x に反比例し，$x = 2$ のとき $y = 3$ であるという。このとき，y を x の式で表し，そのグラフをかけ。

$y = \frac{6}{x}$

2 $y = \frac{a}{x-p} + q$ のグラフ

たとえば，分数関数

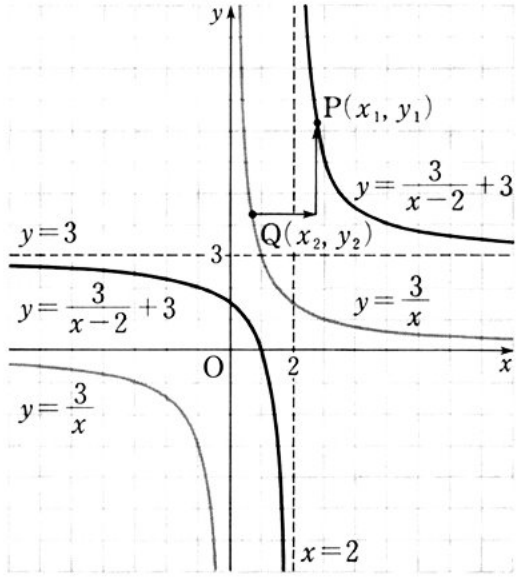
$$y = \frac{3}{x-2} + 3 \qquad ①$$

のグラフを考えてみよう。この曲線上の任意の点 $P(x_1, y_1)$ をとると，

$$y_1 = \frac{3}{x_1 - 2} + 3$$

すなわち

$$y_1 - 3 = \frac{3}{x_1 - 2}$$



したがって，$x_2 = x_1 - 2$, $y_2 = y_1 - 3$ である点 $Q(x_2, y_2)$ は，分数関数

$$y = \frac{3}{x} \qquad ②$$

のグラフ上にある。

$$x_1 = x_2 + 2, \quad y_1 = y_2 + 3$$

であるから，点Pは点Qを，x 軸方向に2，y 軸方向に3だけ平行移動した点である。

このことから，①のグラフは②のグラフを，x 軸方向に2，y 軸方向に3だけ平行移動して得られる曲線であることがわかる。

この平行移動によって，x 軸と y 軸は，それぞれ直線 $y = 3$ と直線 $x = 2$ に移る。したがって，① すなわち $y = \dfrac{3}{x-2} + 3$ のグラフの漸近線は，直線 $x = 2$ と $y = 3$ である。

$y = \dfrac{a}{x-p} + q$ のグラフ

分数関数 $y = \dfrac{a}{x-p} + q$ のグラフは，直角双曲線 $y = \dfrac{a}{x}$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した直角双曲線で，その漸近線は直線 $x = p$ と $y = q$ である。

2節で2次関数のグラフの平行移動を調べ，さらにこの節で分数関数のグラフの平行移動について学んだ。

一般に，関数 $y = f(x)$ のグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると，

$$y = f(x - p) + q$$

のグラフになる。

問3 次の関数のグラフをかけ。また，その漸近線の方程式を求めよ。

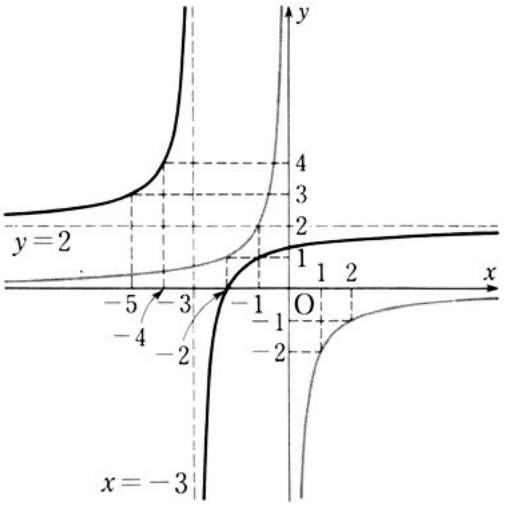
(1) $y = \dfrac{3}{x+2}$　　(2) $y = -\dfrac{2}{x-3} + 1$

例題1 関数 $y = \dfrac{2x+4}{x+3}$ のグラフをかけ。また，$y > 1$ となる x の値の範囲を求めよ。

解 右辺の分数式を次のように変形する。

$$y = \frac{2x+4}{x+3} = \frac{2(x+3)-2}{x+3} = -\frac{2}{x+3} + 2$$

したがって，グラフは $y = -\dfrac{2}{x}$ のグラフを x 軸方向に -3，y 軸方向に 2 だけ平行移動したもので，2 直線 $x = -3$，$y = 2$ を漸近線とする直角双曲線である。



また，$y = 1$ となる x の値は -1 であり，$y > 1$ となる x の値の範囲は，グラフが直線 $y = 1$ より上方にある x の範囲である。

ゆえに，グラフより　　$x < -3,\ x > -1$

問4 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y = \dfrac{3x}{x+2}$　　(2) $y = \dfrac{2x-5}{x+3}$　　(3) $y = \dfrac{x+5}{2-x}$

練習問題

1. 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y = \dfrac{2}{2x-1} - 1$　　(2) $y = \dfrac{1-3x}{1+x}$

2. 関数 $y = \dfrac{3x+5}{x+2}$ のグラフと，直線 $y = 2$ との交点の座標を求めよ。また，$y > 2$ となる x の値の範囲を求めよ。

3. 関数 $y = \dfrac{2}{x-1} + 1$ のグラフと，直線 $y = -1$ および $y = 3$ との交点の座標を求めよ。また，$-1 < y < 3$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

〖6節〗 無理関数とそのグラフ

x の関数 y が，次のように，根号の中に x を含む式で表されるとき，y は x の **無理関数** であるという。

$$y = \sqrt{x}, \quad y = \sqrt{2x + 1}, \quad y = \sqrt{3x - 2}$$

無理関数では，根号の中を負にする x の値は，その定義域に属さない。したがって，上の無理関数の定義域は，それぞれ

$$\{x \mid x \geqq 0\}, \quad \left\{x \mid x \geqq -\frac{1}{2}\right\}, \quad \left\{x \mid x \geqq \frac{2}{3}\right\}$$

である。

1 $y = \sqrt{ax}$ のグラフ

次の関数のグラフについて考えてみよう。

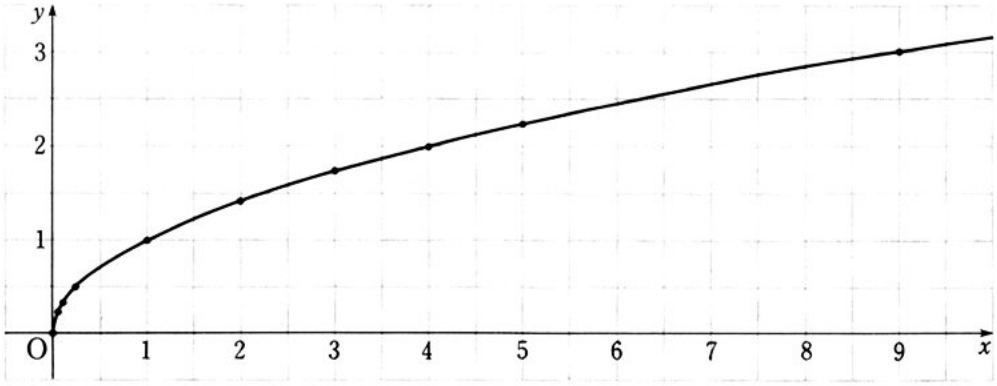
$$y = \sqrt{x} \qquad ①$$

関数 ① の定義域と値域は，ともに 0 または正の実数全体である。

x の値に対応する y の値を表にすると，次のようになる。

x	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	2	3	4	5	……	9	……
y	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	1.41	1.73	2	2.24	……	3	……

表から，グラフは下の図のような曲線になる。



①の両辺を2乗すると，①は

$$y^2 = x \quad (y \geqq 0)$$

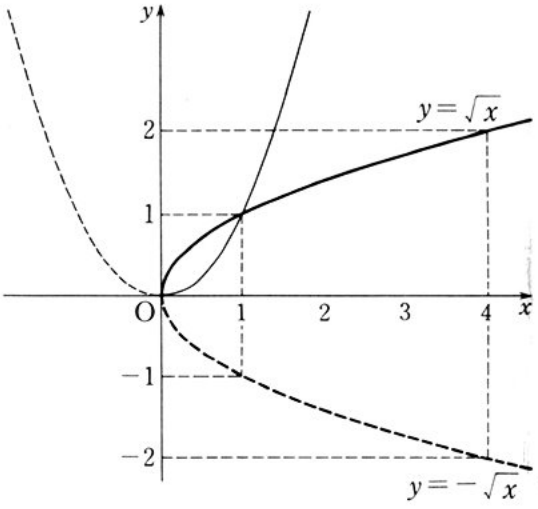
すなわち

$$x = y^2 \quad (y \geqq 0) \qquad ②$$

と同じである。② を

$$y = x^2 \quad (x \geqq 0)$$

と比べると，x と y とをたがいに入れかえた式になっている。



2次関数 $y = x^2$ のグラフは，原点を頂点とし，y 軸を軸とする下に凸の放物線である。したがって，$x = y^2$ のグラフは，原点を頂点とし，x 軸を軸とする“左に凸”の放物線になる。

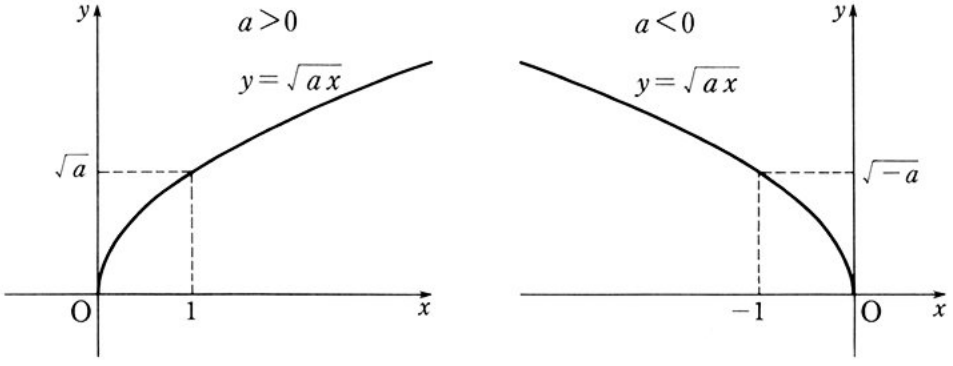
しかし，① すなわち ② では，$y \geqq 0$ であるから，そのグラフは，$x = y^2$ のグラフの $y \geqq 0$ の部分で，上の図の太い実線部分となる。

一方，関数 $y = -\sqrt{x}$ については，$y \leqq 0$ であるから，グラフは，上の図の太い破線部分で，① のグラフと x 軸に関して対称である。

問1 関数 $y = -x^2$ $(x \geqq 0)$ と，関数 $y = \sqrt{-x}$ のグラフをかけ。

次に，$y = \sqrt{-x}$ のグラフと $y = \sqrt{x}$ のグラフを比べよ。

一般に，$y = \sqrt{ax}$ のグラフは，原点を頂点とし，x 軸を軸とする放物線の x 軸より上方の部分で，下の図のようになる。



問2 次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y = \sqrt{2x}$　　(2)　$y = -\sqrt{2x}$　　(3)　$y = \sqrt{-2x}$

(4)　$y = -\sqrt{-2x}$

2 $y = \sqrt{ax + b}$ のグラフ

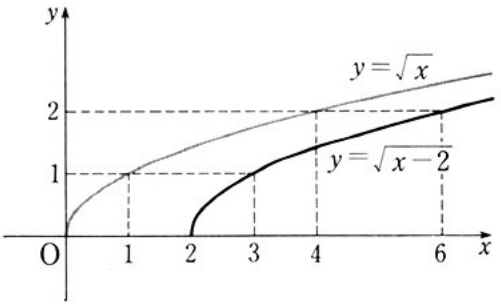
関数

$$y = \sqrt{x - 2}$$

について考えてみよう。

$$f(x) = \sqrt{x}$$

とおくと，$y = \sqrt{x - 2}$ は



$y = f(x - 2)$ と表される。したがって，132 ページで学んだように，$y = \sqrt{x - 2}$ のグラフは，関数 $y = \sqrt{x}$ のグラフを，x 軸方向に 2 だけ平行移動したものであることがわかる。

問3 関数 $y = \sqrt{2x}$ のグラフを，次の (1)，(2) のように平行移動したとき，そのグラフを表す関数を求めよ。

(1)　x 軸方向に 2 だけ平行移動する。

(2)　x 軸方向に -1 だけ平行移動する。

例題1 $y = \sqrt{-2x + 1}$ のグラフをかけ。

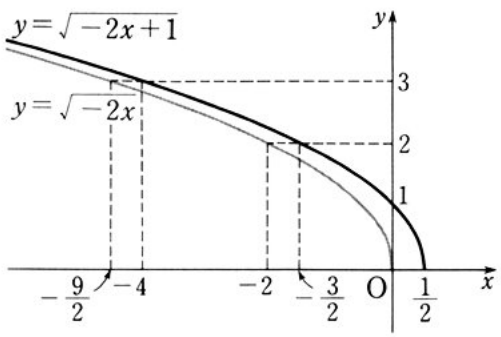
解 $y = \sqrt{-2x + 1}$ は

$$y = \sqrt{-2\left(x - \frac{1}{2}\right)}$$

と変形できる。よって

$$y = \sqrt{-2x + 1}$$

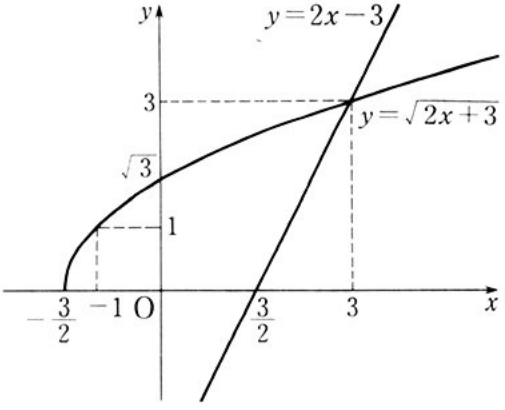
のグラフは，$y = \sqrt{-2x}$ のグラフを x 軸方向に $\frac{1}{2}$ だけ平行移動したもので，上のような図になる。



問4 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y = \sqrt{3 + x}$　　(2) $y = \sqrt{2 - x}$　　(3) $y = -\sqrt{2x + 5}$

例題2 $y = \sqrt{2x + 3}$ のグラフと，直線 $y = 2x - 3$ の交点の座標を求めよ。



解 交点の x 座標は

$$\sqrt{2x + 3} = 2x - 3$$

を満たす。両辺を2乗して整理すれば次のようになる。

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$(x - 3)(2x - 1) = 0$$

したがって，$x = 3$ または $x = \frac{1}{2}$ である。しかし，上の図より $x > \frac{3}{2}$ であるから，$x = 3$ が求める x 座標の値である。このとき $y = 3$ であるから，求める座標は $(3, 3)$ である。

問5 次の2組の関数のグラフをかけ。また，交点の座標を求めよ。

(1) $\begin{cases} y = \sqrt{x + 1} \\ y = x \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} y = \sqrt{3 - x} \\ y = -2x \end{cases}$

練習問題

1. 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y = \sqrt{3x + 1}$

(2) $y = 2\sqrt{x - 1}$

(3) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x - 1}$

2. $y = \sqrt{1-x}$ のグラフと直線 $y = -2x + 2$ の交点の x 座標を求めよ。

〖7節〗逆関数とそのグラフ

1 逆関数

1辺の長さが x cm の正方形の面積を y cm^2 とすると，

$$y = x^2 \quad (x > 0) \qquad ①$$

である。逆に，面積が y cm^2 の正方形の1辺の長さを x cm とすると，x の値は，① すなわち $y = x^2$ $(x > 0)$ を x について解いた式

$$x = \sqrt{y} \quad (y > 0) \qquad ②$$

から求められる。② は，x が y の関数となることを示している。したがって，このときは，y が独立変数で，x は従属変数である。しかし，独立変数は x，従属変数は y を用いて表すことが多い。このため，関数 ② は，x と y を入れかえて新しい関数

$$y = \sqrt{x} \quad (x > 0) \qquad ③$$

が得られる。③ では，x と y との対応関係が ① の逆になっている。

一般に，関数 $y = f(x)$ について，その値域に属する任意の y の値に対して，$y = f(x)$ を満たす x の値がただ1つきまるならば，x は y の関数となる。したがって，この関数を

$$x = g(y)$$

とする。ここで，独立変数は x，従属変数は y を用いて表すと，

$x = g(y)$ の x と y を入れかえて

$$y = g(x)$$

が得られる。この関数 $y = g(x)$ を関数 $y = f(x)$ の **逆関数** という。たとえば，関数 ③ は関数 ① の逆関数である。

関数 $y = f(x)$ の逆関数 $y = g(x)$ は次の性質をもつ。

(1)　$y = g(x)$ の定義域，値域は，$y = f(x)$ の値域，定義域に，それぞれ一致する。

(2)　$y = f(x) \iff x = g(y)$

逆関数の定義から，次のことがわかる。

逆関数の求め方

関数 $y = f(x)$ の逆関数は，$y = f(x)$ を x について解き，$x = g(y)$ を導いてから，x と y を入れかえれば求められる。

例題1　関数 $y = 4x - 8$ の逆関数を求めよ。

解　$y = 4x - 8$ を，x についての方程式と考えて解くと

$$x = \frac{1}{4}y + 2$$

ここで，x と y を入れかえると

$$y = \frac{1}{4}x + 2$$

問1　関数 $y = -2x + 3$ の逆関数を求めよ。

例題2　関数 $y = x^2$ $(x \leqq 0)$ の逆関数を求めよ。また，その定義域と値域をそれぞれ求めよ。

解　$y = x^2$ $(x \leqq 0)$ を x について解くと　　$x = -\sqrt{y}$

ここで，x と y を入れかえると　　$y = -\sqrt{x}$

$y = -\sqrt{x}$ が求める逆関数である。与えられた関数 $y = x^2$ の定義域は $\{x \mid x \leqq 0\}$，値域は $\{y \mid y \geqq 0\}$ であるから，逆関数 $y = -\sqrt{x}$ の定義域と値域は，それぞれ $\{x \mid x \geqq 0\}$，$\{y \mid y \leqq 0\}$ である。

注意　$y > 0$ に対して，$y = x^2$ を満たす実数 x は，$\sqrt{y}$ と $-\sqrt{y}$ の2つがあって，ただ1通りにきまらない。したがって，定義域を実数全体の集合とすると，$y = x^2$ は逆関数をもたない。

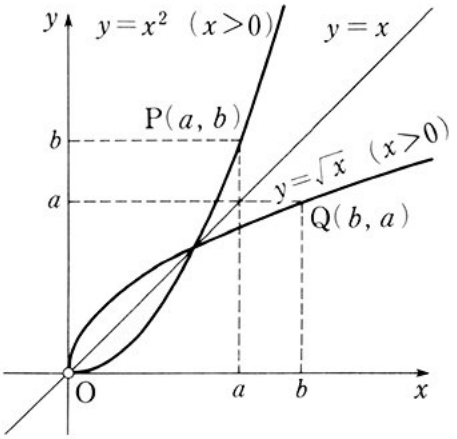
問2 次の関数の逆関数を求めよ。また，その定義域と値域をそれぞれ求めよ。

(1)　$y = 2x^2 \ (x \leqq 0)$　　(2)　$y = x^2 - 2 \ (x \geqq 0)$

(3)　$y = \dfrac{1}{x-1}$　　(4)　$y = \sqrt{x}$

2 逆関数のグラフ

関数 $y = x^2 \ (x > 0)$ と，その逆関数 $y = \sqrt{x} \ (x > 0)$ のグラフの関係を調べてみよう。

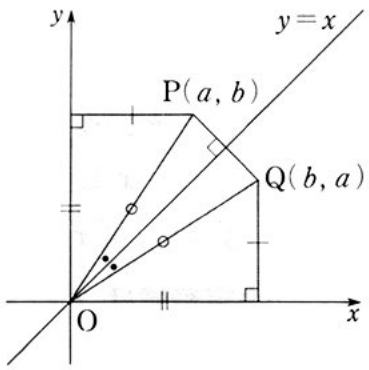


関数 $y = x^2 \ (x > 0)$ のグラフの上に，任意の点 $\mathrm{P}(a, b)$ をとると

$$b = a^2 \quad (a > 0)$$

すなわち，$a = \sqrt{b} \quad (b > 0)$

であるから，点 $\mathrm{Q}(b, a)$ は，逆関数 $y = \sqrt{x} \ (x > 0)$ のグラフの上にある。また，この逆も成り立つ。



右の図で，点 $\mathrm{P}(a, b)$ を，直線 $y = x$ を軸に折り返した点を考えれば，この点の座標は (b, a) になって Q と一致するから，点 P と点 Q，また，これらの点の集合である $y = x^2$ のグラフと $y = \sqrt{x}$ のグラフは，直線 $y = x$ に関して対称となる。

逆関数のグラフ

関数 $y = f(x)$ のグラフとその逆関数 $y = g(x)$ のグラフは，直線 $y = x$ に関して対称である。

例題3 関数 $y = -\frac{1}{2}(x^2 - 1)$ の逆関数を求め，そのグラフをかけ。ただし，定義域を $\{x \mid x \geqq 0\}$ とする。

解 $y = -\frac{1}{2}(x^2 - 1)$ $(x \geqq 0)$ を x について解くと

$$x^2 = 1 - 2y$$

$x \geqq 0$ であるから

$$x = \sqrt{1 - 2y}$$

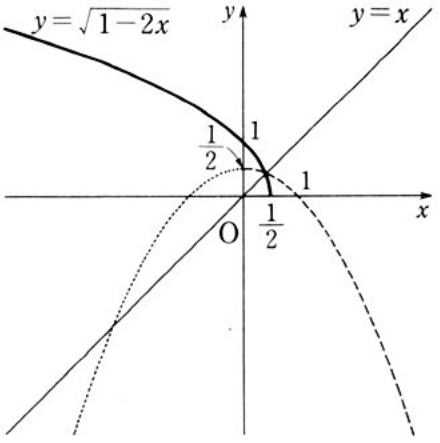
ここで x と y を入れかえると

$$y = \sqrt{1 - 2x}$$

この関数が求める逆関数である。

定義域は，$1 - 2x \geqq 0$ より

$$x \leqq \frac{1}{2}$$



ゆえに，グラフは上の図の太い実線の曲線になる。

問3 次の関数の逆関数を求め，そのグラフをかけ。

(1) $y = 1 - \frac{1}{3}x$　　(2) $y = 3x^2 + 2$ $(x \leqq 0)$

(3) $y = \sqrt{4x + 1}$　　(4) $y = \frac{1}{x} - 1$

練習問題

1. 次の関数の逆関数を求め，そのグラフをかけ。

(1) $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$　　(2) $y = \frac{2x + 3}{5x - 6}$

(3) $y = 5x^2 - 3$ $(x > 0)$　　(4) $y = \sqrt{2 - 3x}$

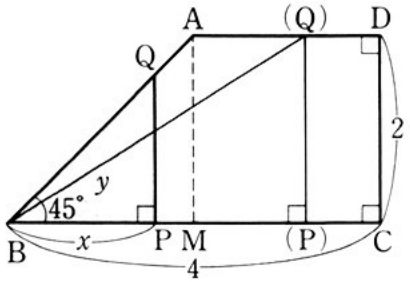
2. 関数 $y = f(x)$ の逆関数を $y = g(x)$ とする。$a \neq 0$ として，$f(x) = ax + b$ とするとき，次の問に答えよ。

(1) $f(1) = -1$，$g(5) = 4$ であるとき，a, b の値を求めよ。

(2) a の値が1と -1 のとき，$f(x)$ が $g(x)$ と等しくなるのは，b がどのような値のときか。

発展　xの範囲によって異なる式で表される関数

右の図のような台形ABCDがある。点Pが辺BC上を動くとき，Pを通り，BCに立てた垂線とABまたはADとの交点をQとする。QがAに一致したときのPの位置をMとする。



Pの動いた距離をxとし，△BPQの面積をyとすると，yはxの関数である。図のように，$\angle B = 45^\circ$, $\angle C = \angle D = 90^\circ$, $BC = 4$, $CD = 2$ とすると，

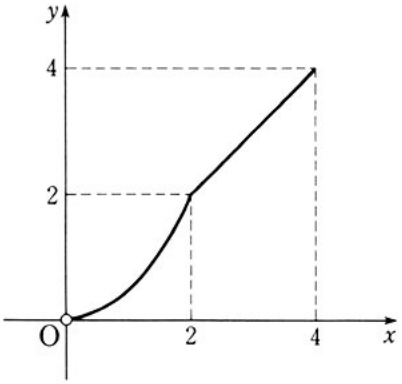
Pが BM 上にあるとき

$$y = \frac{1}{2}x^2 \quad (0 < x \leqq 2)$$

Pが MC 上にあるとき

$$y = x \quad (2 < x \leqq 4)$$

で表され，この関数のグラフは右の図のようになる。



また，関数 $y = |x|$ のグラフについて考えてみよう。この関数は

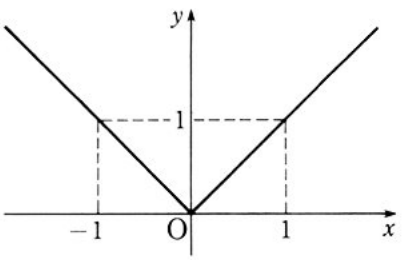
$x \geqq 0$ のとき　$y = x$,

$x < 0$ のとき　$y = -x$

であるから

$$y = \begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

と表すこともある。したがって，グラフは上の図のようになる。



○　次の関数のグラフをかいてみよ。

(1)　$y = \begin{cases} 2x & (0 \leqq x < 1) \\ 2 & (1 \leqq x < 2) \\ -2x^2 + 12x - 14 & (2 \leqq x < 4) \end{cases}$

(2)　$y = |x - 2|$

第5章の問題

A

1. 次の関数の値域を求めよ。

(1) $y = 2x^2 - x \quad (0 \leqq x \leqq 3)$　　(2) $y = x^2 + x + 1 \quad (1 \leqq x \leqq 3)$

(3) $y = \dfrac{x+2}{x-2} \quad (x \geqq 0)$　　(4) $y = \sqrt{3-2x} \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$

2. 次の関数のグラフをかけ。また，これらのグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動したときの頂点の座標をそれぞれ求めよ。

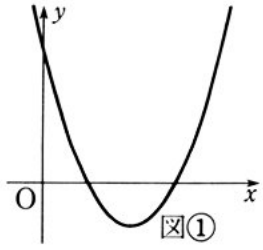
(1) $y = 3x^2 + x - \dfrac{11}{12}$　　(2) $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 1$

3. 2次関数 $y = -x^2 + 1$ のグラフを平行移動して，頂点が，次の点にくるようにしたとき，その放物線をグラフとする2次関数を求めよ。

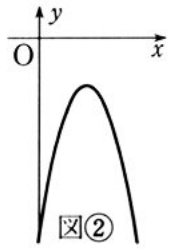
(1) $(-2,\ 0)$　　(2) $\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{4}\right)$　　(3) $(-3,\ 1)$

4. 和が1であるような2つの正の数の積が最大になるのは，2つの数がどのような値のときか。

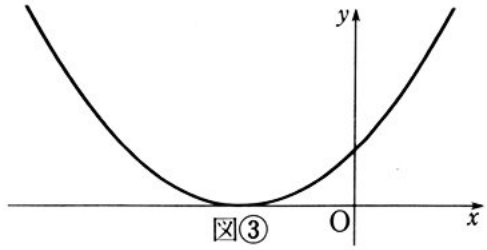
5. 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが，それぞれ図①，②，③ であるとき，a, b, c および $b^2 - 4ac$ が，正，負または0のいずれであるかを示せ。



図①



図②



図③

6. 放物線 $y = ax^2 + x + b$ が2点 A(1, 0), B(0, 1) を通るとき，a, b の値を求めよ。

7. 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y = \dfrac{3x+1}{x-2}$　　(2) $y = \dfrac{3-4x}{2x+1}$

(3) $y = \sqrt{-x+5}$　　(4) $y = -\sqrt{2x+4}$

8. 次の関数の逆関数を求め，それぞれのグラフをかけ。

(1) $y = -2x + 3 \quad (x \geqq 0)$　　(2) $y = (x+1)^2 \quad (x \leqq -1)$

(3) $y = \dfrac{x-1}{x+1} \quad (x \neq -1)$　　(4) $y = \dfrac{2x+1}{x-2} \quad (x \neq 2)$

B

1. 放物線 $y = 2x^2 + kx + 1$ が x 軸に接するときの k の値を求めよ。また，そのとき，$1 \leqq x \leqq 3$ の範囲で y の最大値を求めよ。

2. 放物線 $y = x^2 + 2kx + k + 1$ と直線 $y = x$ について，次の問に答えよ。

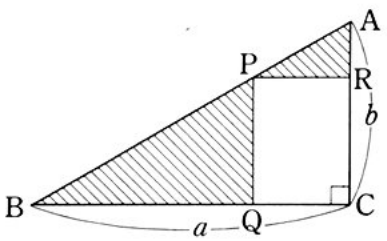
(1) 接するとき，k の値を求めよ。

(2) 2点を共有するとき，k の値の範囲を求めよ。

(3) 共有点がないとき，k の値の範囲を求めよ。

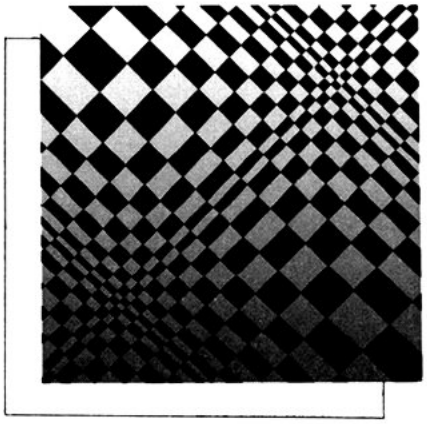
3. 放物線 $y = x^2 + kx + k - 1$ が直線 $y = x$ に接するとき，この放物線は直線 $y = 1 - x$ と共有点をもつことを示せ。

4. 右の図のような直角三角形 ABC の AB 上に点 P をとり，BC と AC に垂線 PQ と PR をひく。$BC = a$, $AC = b$ として，図の斜線部分の面積が最小になるときの PQ の値を求めよ。



5. 周の長さが一定である長方形のうち，面積が最大となるものは，正方形であることを証明せよ。

6. $a > 0$ として，直線 $y = \sqrt{a}\,x$ のグラフと無理関数 $y = \sqrt{2x+1}$ のグラフとの交点の x 座標を求めよ。



第6章 平面図形と式

1節・点の座標
2節・直線の方程式
3節・2直線の関係
4節・円と直線
5節・軌跡の方程式
6節・不等式の表す領域

古代の数学を集大成したものとしてユークリッドの『原論』がある。中学校で学んだ図形の性質の多くはこの『原論』の中に収められており，今日の初等幾何学は紀元前に発見されていたといえる。

17世紀に現れたデカルトの幾何学は，それ以前の幾何学を大きく変えるものとなった。彼は，座標を導入して，図形を代数的な量の関係として表し，代数的な取り扱いによって，幾何学を再構成した。

その後，空間に座標を導入したり，複素数の座標を扱うことにより，解析学や代数学をとり入れた幾何学が大きく発展した。

この章では，座標を用いた平面図形の方程式やその扱い方の基本を学ぶが，それらは空間図形を考える場合の基礎となる。

〖1節〗 点の座標

1 直線上の点の座標

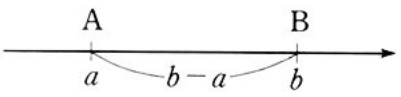
すでに学んだように，数直線上において，座標が x である点Pを $P(x)$ と書く。

2点間の距離

数直線上に2点 $A(a)$, $B(b)$ をとる。2点AとBの距離ABは，

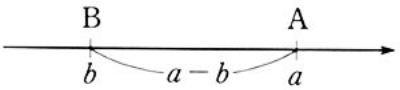
$a < b$ のとき　$AB = b - a$

$a > b$ のとき　$AB = a - b$



である。絶対値の記号を用いて表すと

$$AB = |b - a|$$



である。

例1 数直線上の2点 $A(-2)$ と $B(4)$, $C(5)$ と $D(2)$ の距離は

$$AB = |4 - (-2)| = 6, \quad CD = |2 - 5| = |-3| = 3$$

問1 数直線上の次の2点間の距離を求めよ。

(1) $A(-1)$, $B(3)$　　(2) $C(-4)$, $D(-5)$

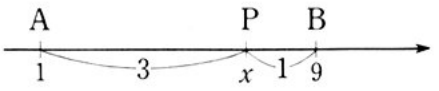
問2 数直線上で，点 $P(-3)$ からの距離が5である2点を求めよ。

内分点・外分点

線分AB上に点Pをとり，線分APとPBの長さの比が $m : n$ になるとき，点Pは線分ABを $m : n$ に**内分**する，または2点A, Bを $m : n$ に内分するという。この場合，$m > 0$, $n > 0$ とする。

線分ABの中点Mは，ABを1:1に内分する点である。

例題1 2点を A(1), B(9) とする。線分 AB を 3:1 に内分する点 P の座標を求めよ。



解 点 P の座標を x とすると

$$AP = x - 1, \quad PB = 9 - x$$

よって　　$(x-1):(9-x) = 3:1$

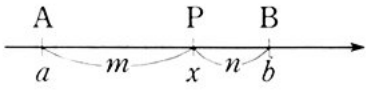
$$x - 1 = 3(9 - x)$$

これを解いて　　$x = 7$

ゆえに　　点 P の座標は 7

問3 2点 A(−7), B(3) を 3:2 に内分する点 P の座標を求めよ。

2点 A(a), B(b) を $m:n$ に内分する点 P の座標 x を求めてみよう。



$a < b$ とすると

$$AP : PB = (x - a) : (b - x) = m : n$$

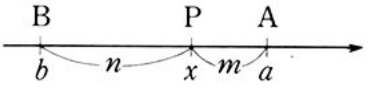
よって　　$n(x - a) = m(b - x)$

$$(m + n)x = na + mb$$

したがって　　$\boldsymbol{x = \dfrac{na + mb}{m + n}}$

$a > b$ のときも，同様にして

$$x = \frac{na + mb}{m + n}$$



が得られる。

とくに，線分 AB の中点の座標は

$$x = \frac{a + b}{2}$$

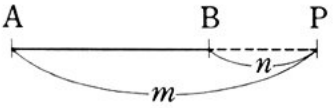
問4 数直線上で，次の各点の座標を求めよ。

(1) 2点 A(1), B(−5) を 1:3 に内分する点

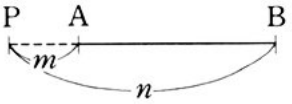
(2) 2点 $A\left(-\frac{14}{3}\right)$, B(−2) の中点

線分 AB の延長上に点 P があって，AP : PB = $m : n$ が成り立つとき，点 P は線分 AB を $m : n$ に **外分** するという。

$m > n$ のときは，点 P は線分 AB のBの側の延長上にある。



$m < n$ のときは，点 P は線分 AB のAの側の延長上にある。



例題2 2点を A(1), B(7) とするとき，次の各点の座標 x を求めよ。

(1) 線分 AB を 5 : 2 に外分する点 P

(2) 線分 AB を 1 : 4 に外分する点 Q

解 (1) AP : PB = $(x-1) : (x-7) = 5 : 2$

$2(x-1) = 5(x-7)$　これを解いて　$x = 11$

ゆえに　点 P の座標は 11

(2) AQ : QB = $(1-x) : (7-x) = 1 : 4$

$4(1-x) = 7-x$　これを解いて　$x = -1$

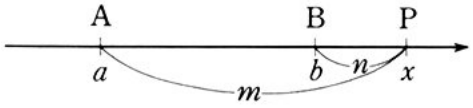
ゆえに　点 Q の座標は -1

問5 2点を A(1), B(5) とするとき，線分 AB を 2 : 1 に外分する点，および 3 : 5 に外分する点の座標を求めよ。

2点 A(a), B(b) を $m : n$ に外分する点を P(x) とする。

$m > n$ のときは

$(x-a) : (x-b) = m : n$



よって　$$x = \frac{-na + mb}{m - n}$$

問6 $m < n$ のときも，上の公式が成り立つことを確かめよ。

問7 2点を A(−5), B(7) とするとき，線分 AB を 3 : 1 に外分する点，および 2 : 5 に外分する点の座標を求めよ。

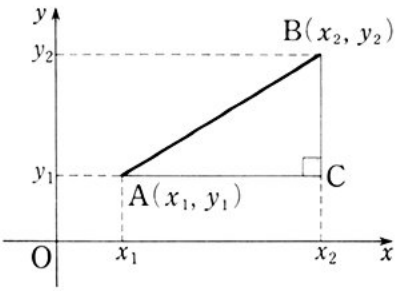
2 平面上の点の座標

すでに学んだように，座標平面上において，座標が (x, y) である点Pを $P(x, y)$ と書く。

2点間の距離

2点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 間の距離を求めてみよう。

右の図のように，点Aを通り x 軸に平行な直線と，点Bを通り y 軸に平行な直線との交点をCとする。



△ABCは直角三角形であり，

$AC = |x_2 - x_1|$, $BC = |y_2 - y_1|$

である。三平方の定理によって

$$AB^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

となるから，2点AB間の距離は，次のようになる。

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

平面上の2点間の距離

2点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 間の距離は

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

とくに，原点Oと点 $P(x, y)$ との距離は

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$

例2 座標平面上の2点 $A(1, 1)$, $B(5, 3)$ 間の距離は

$$AB = \sqrt{(5 - 1)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

問8 次の2点間の距離を求めよ。

(1) $(0, 0)$, $(-3, 4)$　　(2) $(2, 4)$, $(-5, 3)$

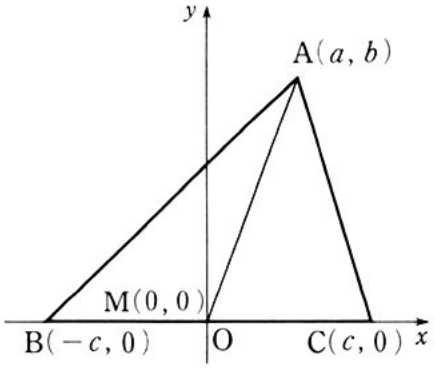
(3) $(1, 6)$, $(1 + \sqrt{3}, -2)$　　(4) $(\sqrt{2}, -3)$, $(\sqrt{2}, 5)$

例題3 △ABC において，辺 BC の中点を M とするとき

$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

が成り立つことを示せ。

証明 M を原点とし，直線 BC を x 軸にとり，M を通り BC に垂直な直線を y 軸にとる。



A(a, b), C$(c, 0)$ とすると，B の座標は $(-c, 0)$ である。

したがって

$$AB^2 = (a+c)^2 + b^2, \qquad AC^2 = (a-c)^2 + b^2$$

$$AM^2 = a^2 + b^2, \qquad BM^2 = c^2$$

よって　$AB^2 + AC^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$

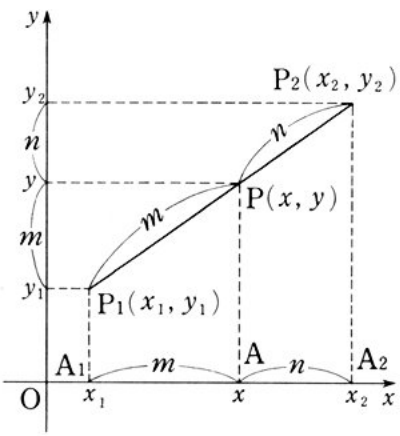
$2(AM^2 + BM^2) = 2(a^2 + b^2 + c^2)$

ゆえに　$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$

問9 △ABC で，B$(-4, 0)$, C$(2, 0)$ とする。△ABC が正三角形となるように，頂点 A の座標を定めよ。

内分点・外分点

平面上の 2 点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ を結ぶ線分 P_1P_2 を $m:n$ に内分する点 P の座標 (x, y) を求めてみよう。



P_1, P_2, P の各点から x 軸に垂線をひき，交点をそれぞれ A_1, A_2, A とすると

$$P_1P : PP_2 = A_1A : AA_2 = m : n$$

であり，x 軸上で点 A は線分 A_1A_2 を $m:n$ に内分する点である。

したがって，P の x 座標は

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n}$$

同様にして，y 座標は

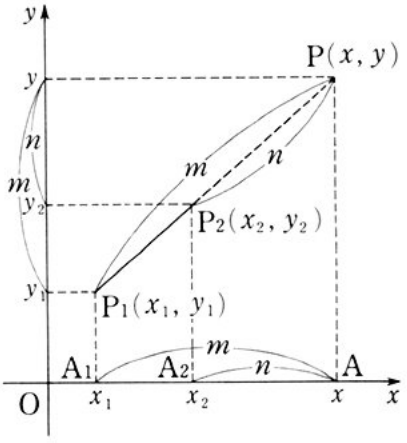
$$y = \frac{ny_1 + my_2}{m + n}$$

外分する点 P の座標も，148 ページの数直線上の 2 点を外分する公式を用いると，同様にして求めることができて，

$$\left(\frac{-nx_1 + mx_2}{m - n},\ \frac{-ny_1 + my_2}{m - n}\right)$$

となる。

したがって，次の公式が得られる。



内分点・外分点の座標

2 点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ を結ぶ線分 P_1P_2 を $m:n$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m + n},\ \frac{ny_1 + my_2}{m + n}\right)$$

$m:n$ に外分する点の座標は

$$\left(\frac{-nx_1 + mx_2}{m - n},\ \frac{-ny_1 + my_2}{m - n}\right)$$

とくに，線分 P_1P_2 の中点の座標は

$$\left(\frac{\boldsymbol{x_1 + x_2}}{\boldsymbol{2}},\ \frac{\boldsymbol{y_1 + y_2}}{\boldsymbol{2}}\right)$$

問10 2 点 A(−2, 1), B(4, 7) について，線分 AB を 2:3 に内分する点と，AB を 5:2 に外分する点の座標をそれぞれ求めよ。

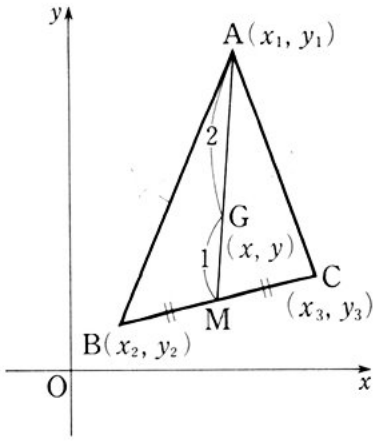
例題4　3点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ を頂点とする △ABC について，辺BCの中点をMとする。線分AMを2:1に内分する点Gの座標 (x, y) を求めよ。

解　辺BCの中点Mの座標は

$$\left(\frac{x_2 + x_3}{2},\ \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$$

GはAMを2:1に内分するから

$$x = \frac{x_1 + 2 \times \dfrac{x_2 + x_3}{2}}{2 + 1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$



$$y = \frac{y_1 + 2 \times \dfrac{y_2 + y_3}{2}}{2 + 1} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

ゆえに，Gの座標は

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},\ \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

問11　例題4において，CA, ABの中点をそれぞれN, Lとする。BN, CLを2:1に内分する点はいずれもGであることを示せ。

注意　三角形の3つの中線は1点で交わる。この点を**重心**という。三角形の重心は，中線を2:1に内分する点である。

練習問題

1.　2点 $A(-2)$, $B(4)$ について，線分ABを2:1に内分する点をP，2:1に外分する点をQとする。線分PQの長さを求めよ。

2.　△ABCについて，辺BCを2:1に内分する点をPとするとき，$AB^2 + 2AC^2 = 3(AP^2 + BP \cdot CP)$ が成り立つことを示せ。

3.　3点 $A(3, -6)$, $B(-4, 2)$, $C(1, 4)$ を頂点とする △ABC の重心Gの座標を求めよ。

〖2節〗直線の方程式

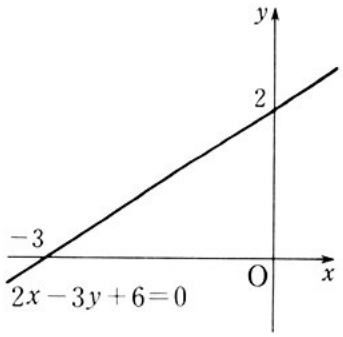
1次方程式

$$2x - 3y + 6 = 0$$

を満たす実数の組 (x, y) は，この方程式の解である。解 (x, y) を座標にもつ点の集合

$$\{(x, y) \mid 2x - 3y + 6 = 0\}$$

は，座標平面上の直線を表す。



一般に，x, y についての方程式の解 (x, y) の集合は，座標平面上で1つの図形 F を表す。この図形 F を，**方程式の表す図形** または **方程式のグラフ** という。また，点 (a, b) が図形 F 上にあれば，$x = a$, $y = b$ はこの方程式の解である。そこで，この方程式を図形 F の方程式ともいう。

問1 》 次の方程式の表す図形をかけ。

(1) $5x - 2y - 10 = 0$　　(2) $3x + 4y - 6 = 0$

(3) $6x + 30 = 0$　　(4) $-y + 7 = 0$

点 $A(x_1, y_1)$ を通り，傾き m の直線の方程式を求めてみよう。

傾きが m，切片が n である直線 l の方程式は

$$y = mx + n$$

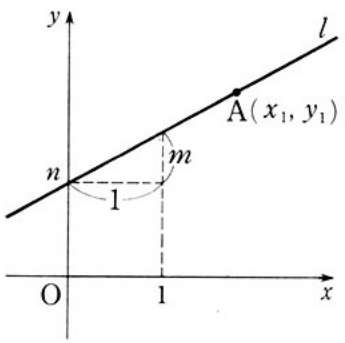
である。l が点 $A(x_1, y_1)$ を通るならば

$$y_1 = mx_1 + n$$

両式から n を消去すると，方程式

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

が得られる。



したがって，次のようにまとめられる。

1点を通る傾き m の直線

点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，傾きが m の直線の方程式は

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

問2 点 $(1,\ -2)$ を通り，次の傾きをもつ直線の方程式を求めよ。

(1) 傾きが 3　　(2) 傾きが -2　　(3) 傾きが 0

次に，異なる2点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ を通る直線 l の方程式を求めよう。

(i) $x_1 \neq x_2$ のとき

直線 l は y 軸に平行でないので，傾きを m とし，点Aを通るから

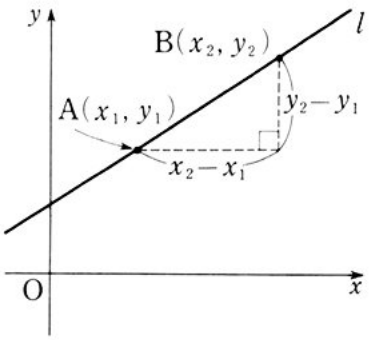
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

さらに，点Bが l 上にあるから

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

よって，l の傾き m は

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



これをはじめの方程式に代入すると，直線 l の方程式は

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

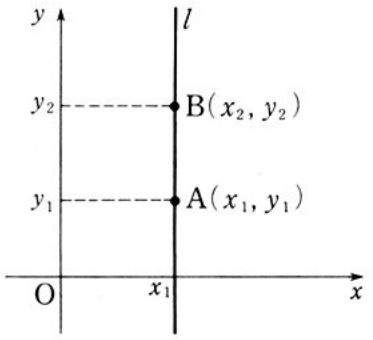
(ii) $x_1 = x_2$ のとき

直線 l は y 軸に平行である。l 上のどの点の x 座標も x_1 であるから

$$x = x_1$$

が直線 l の方程式である。

したがって，(i)，(ii) より次のよ



うにまとめられる。

2点を通る直線

異なる2点 (x_1, y_1), (x_2, y_2) を通る直線の方程式は

$x_1 \neq x_2$ のとき　　$y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

$x_1 = x_2$ のとき　　$x = x_1$

以上のように，座標平面上において，直線の方程式は x, y の1次方程式で表される。逆に，x, y の1次方程式の表す図形は直線である。

問3 次の2点A, Bを通る直線の方程式を求めよ。

(1) A(1, 2), B(3, 8)　　(2) A(4, −1), B(−2, 3)

(3) A(−1, 2), B(1, 2)　　(4) A(−2, 5), B(−2, 1)

問4 2点 A$(a, 0)$, B$(0, b)$ を通る直線の方程式は

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

となることを示せ。ただし，$a \neq 0$, $b \neq 0$ とする。

問5 2点 A(3, 0), B(0, −5) を通る直線の方程式を求めよ。

練習問題

1. 次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

(1) 点 (−4, 1) を通り，傾きが3

(2) 点 (5, −2) を通り，傾きが −2

(3) 点 (−3, −1) を通り，x 軸に平行

(4) 2点 A(3, 4), B(−6, 5) を通る直線

2. 直線 $2x + ay = 8$ が点 (1, 3) を通るとき，a の値を求めよ。

3. 3点 A(−2, 6), B(2, 8), C(6, 10) は同一直線上にあることを示せ。

4. 3点 A(2, 3), B(5, 7), C$(-7, a)$ が同一直線上にあるとき，a の値を定めよ。

〖3節〗2直線の関係

1 平行な2直線

座標平面上において，2直線が交わる場合，その交点の座標 (x, y) は，2直線の方程式を同時に満たす x, y の値によって与えられる。たとえば，2直線 $x + 2y - 4 = 0$, $x - y - 1 = 0$ の交点の座標は，これらを連立方程式として解くことにより，$(2, 1)$ であることがわかる。

問1 〉 次の2直線の交点の座標を求めよ。また，2直線のグラフをかけ。

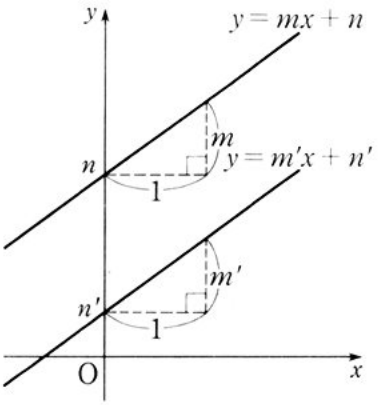
$$x + 2y - 4 = 0, \quad x - y - 1 = 0$$

2直線の方程式を

$$y = mx + n$$

$$y = m'x + n'$$

とする。2直線が平行ならば傾きは等しいから，$m = m'$ が成り立つ。逆に，$m = m'$ ならば，2直線は平行である。



とくに，$m = m'$ かつ $n = n'$ ならば，2直線は一致する。このときも平行の特別な場合と考える。

したがって，次のことが成り立つ。

2直線の平行条件

2直線 $y = mx + n$, $y = m'x + n'$ について

2直線が平行 $\iff$ $m = m'$

2直線が一致 $\iff$ $m = m'$, $n = n'$

問2 点 $(-3, 2)$ を通り，次の直線に平行な直線の方程式を求めよ。

(1) $2x - y - 1 = 0$　　(2) $4x + 5y + 2 = 0$

(3) $y + 2 = 0$　　(4) $x - 1 = 0$

2 垂直な2直線

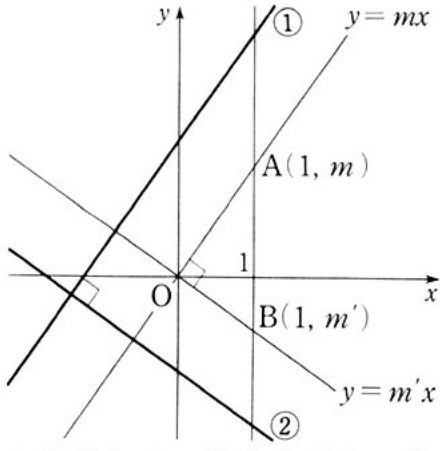
座標軸に平行でない2直線が垂直になる条件を求めてみよう。

$mm' \neq 0$ である2直線の方程式を

$$y = mx + n \qquad ①$$

$$y = m'x + n' \qquad ②$$

とする。①，②に平行で原点を通る2直線は，それぞれ $y = mx$，$y = m'x$ となるから，この2直線が垂直である条件を求めればよい。



$y = mx$，$y = m'x$ と直線 $x = 1$ との交点をA，Bとすると，A，Bの座標はそれぞれ $(1, m)$，$(1, m')$ となる。$y = mx$ と $y = m'x$ が垂直ならば，$OA \perp OB$ であるから，三平方の定理により

$$AB^2 = OA^2 + OB^2$$

したがって　　$(m - m')^2 = (1 + m^2) + (1 + m'^2)$

これを整理すると　　$mm' = -1$

逆に，$mm' = -1$ ならば，$OA \perp OB$ である。

したがって，次のようにまとめられる。

2直線の垂直条件

$m \neq 0$, $m' \neq 0$ である2直線 $y = mx + n$, $y = m'x + n'$ について

$$2\text{直線が垂直} \iff mm' = -1$$

例1 2直線 $y=\frac{1}{2}x+2$ と $y=-2x+4$ とは，

$$\frac{1}{2}\times(-2)=-1$$

であるから，垂直条件からたがいに垂直である。

問3 次の直線のうち，たがいに垂直な2直線を記号でいえ。

ア．$x+3y+3=0$　　イ．$y=\sqrt{3}x+1$　　ウ．$y=3$

エ．$x=2$　　オ．$y=3x-5$　　カ．$\sqrt{3}y=-x$

問4 次の2直線が垂直になるように，a の値を定めよ。

$$3x-7y+1=0,\quad ax+2y-4=0$$

例題1 2点 A(3, 2), B(5, 3) を通る直線に垂直で，点 (1, 2) を通る直線の方程式を求めよ。

解 2点A, Bを通る直線の傾きは

$$\frac{3-2}{5-3}=\frac{1}{2}$$

求める直線の傾きを m とすれば，垂直条件から

$$\frac{1}{2}\times m=-1$$

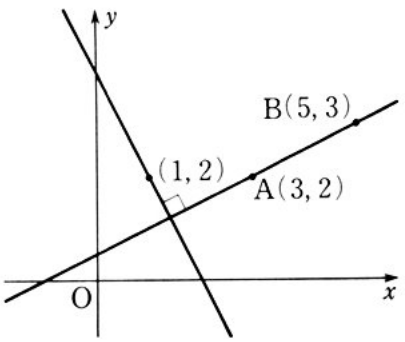
すなわち　　$m=-2$

点 (1, 2) を通り，傾き -2 の直線の方程式は

$$y-2=-2(x-1)$$

ゆえに，求める直線は

$$y=-2x+4$$



問5 次の直線の方程式をそれぞれ求めよ。

(1) $4x+3y-5=0$ に垂直で，点 $(0, -1)$ を通る直線

(2) 2点 A(0, 4), B(−3, 6) を通る直線に垂直で，点 (4, 7) を通る直線

3 点と直線の距離

点Aから直線 l にひいた垂線と l との交点をHとするとき，線分AHの長さを点Aと直線 l との**距離**という。

例題2 点A(1, 4)と直線 $x-2y+2=0$ との距離を求めよ。

解 点Aからその直線に垂線をひき，直線との交点をHとする。

与えられた直線の方程式は

$$y=\frac{1}{2}x+1 \qquad ①$$

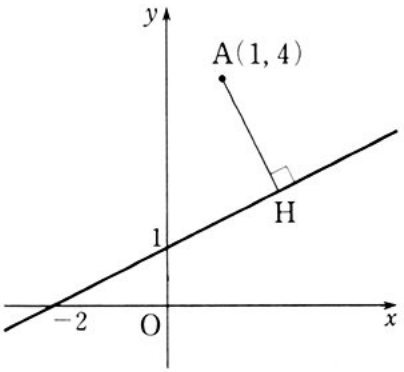
となり，その傾きは $\frac{1}{2}$ である。

垂線AHの傾きを m とすれば，

垂直条件から

$$m\times\frac{1}{2}=-1$$

すなわち $m=-2$



垂線AHは傾きが -2 で点A(1, 4)を通るから，方程式は

$$y-4=-2(x-1)$$

すなわち $y=-2x+6 \qquad ②$

Hは2直線①，②の交点であるから，その座標の値は①と②の方程式を同時に満たす。したがって

$$x=2,\quad y=2$$

となるので，Hの座標は(2, 2)である。

よって $\mathrm{AH}=\sqrt{(2-1)^2+(2-4)^2}=\sqrt{5}$

ゆえに，求める距離は $\sqrt{5}$ である。

問6 原点から直線 $3x-4y=5$ にひいた垂線の長さを求めよ。

問7 点 $(-3, 2)$ と直線 $2x-y+3=0$ との距離を求めよ。

問8 原点から直線 $ax-y+2=0$ にひいた垂線の長さが1となるように，a の値を定めよ。

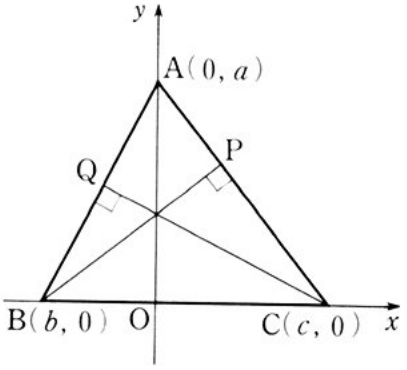
4 座標を用いた図形の性質の証明

点の座標や直線の方程式，およびそれらの関係を用い，式の計算によって図形の性質を調べることができる。

例題3 △ABC の3つの頂点から，それぞれの対辺にひいた3本の垂線は，1点で交わることを証明せよ。

証明 三角形の3つの頂角のうち，少なくとも2つの頂角は鋭角であるから，∠B と ∠C が鋭角の場合のみを考えればよい。

右の図のように，底辺 BC が x 軸上にあり，頂点 A が y 軸上にあるように座標軸をとる。3つの頂点の座標を A$(0,\ a)$, B$(b,\ 0)$, C$(c,\ 0)$ とし，B, C からそれぞれの対辺へ垂線 BP, CQ をひく。



直線 AC の傾きは $-\dfrac{a}{c}$ であるから，BP の傾きは $\dfrac{c}{a}$ である。したがって，直線 BP の方程式は

$$y = \frac{c}{a}(x - b) \qquad ①$$

また，直線 AB の傾きは $-\dfrac{a}{b}$ であるから，CQ の傾きは $\dfrac{b}{a}$ である。したがって，直線 CQ の方程式は

$$y = \frac{b}{a}(x - c) \qquad ②$$

①, ② を解いて，BP と CQ の交点の座標は $\left(0,\ -\dfrac{bc}{a}\right)$ である。よって，3つの垂線 AO, BP, CQ は1点で交わる。

注意 上の例題3における3垂線の交点を △ABC の **垂心** という。

座標を用いて図形の性質を証明するには，次の手順をとる。

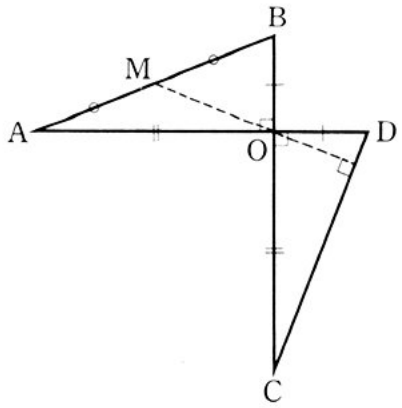
(1)　与えられた図形に対して，適当に座標軸を定める。

(2)　与えられた図形の条件や関係を，座標を用いて数式で表す。

(3)　(2)の結果を計算によって証明する。

問9 》　右の図のように，OA = OC, OB = OD である2つの直角三角形がある。

OA ⊥ OC のとき，辺ABの中点MとOを結ぶ直線は，CDと垂直になることを示せ。



問10 》　三角形の各辺の垂直二等分線は1点で交わることを示せ。

《 練習問題 》

1.　次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

(1)　直線 $3x + y = 7$ に平行で，点 $(5, -4)$ を通る。

(2)　点 $(-3, 4)$ を通り，直線 $2x + 3y = 6$ に垂直

(3)　2点 A$(1, -3)$, B$(5, 2)$ を通る直線に垂直で，点 $(-1, 4)$ を通る直線

2.　2直線 $x - y + 2 = 0$, $3x + 2y - 2 = 0$ の交点を通り，次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

(1)　原点を通る。　　(2)　直線 $3x + 2y = 8$ に平行

(3)　点 $(-2, 1)$ を通る。　　(4)　直線 $2x + y = 10$ に垂直

3.　2直線 $ax + y = 1$, $(a - 2)x + y = 1$ が垂直に交わるとき，a の値を求めよ。また，交点の座標を求めよ。

〖4節〗円と直線

1 円の方程式

円は，定点から一定の距離にある点の集合である。その定点が円の中心であり，一定の距離が円の半径を表す。

座標平面上で円を表す方程式を求めよう。

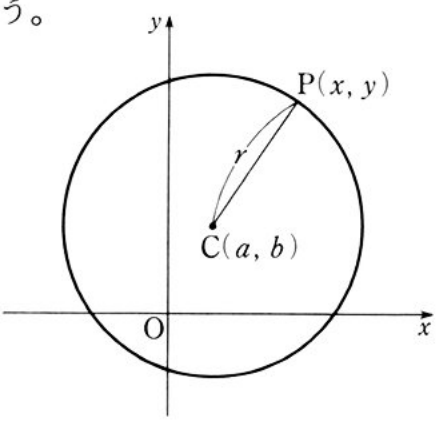
円の中心 C(a, b)，半径 r とし，円上の任意の点を P(x, y) とすれば，

$$\mathrm{CP} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

である。$\mathrm{CP} = r$ であるから

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

したがって　　$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$



円の方程式

中心 (a, b)，半径 r の円の方程式は

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

とくに，原点を中心とする半径 r の円の方程式は

$$x^2 + y^2 = r^2$$

例1 中心 $(0, 3)$，半径 4 の円の方程式は，

$$x^2 + (y-3)^2 = 16$$

問1 次の方程式の表す円の中心と半径をそれぞれ求めよ。

(1) $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 9$　　(2) $x^2 + y^2 = 2$

(3) $(x+3)^2 + (y+5)^2 = 25$　　(4) $(x-1)^2 + y^2 = 3$

問2 次の条件を満たす円の方程式をそれぞれ求めよ。

(1) 中心 $(-1, 2)$，半径 3

(2) 中心 $(1, -1)$，半径 $\sqrt{2}$

円の方程式 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を展開して移項すると，

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

となる。したがって，円は x と y についての次の形の2次方程式

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

で表される。

例題1 次の方程式はどんな図形を表すか。

$$x^2+y^2-4x-6y-3=0$$

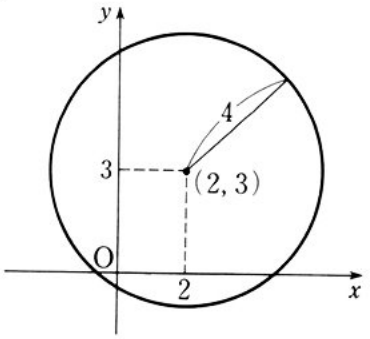
解 与えられた方程式を変形すると

$$(x^2-4x+4)+(y^2-6y+9)-16=0$$

$$(x-2)^2+(y-3)^2=4^2$$

したがって，この方程式は

中心 $(2, 3)$，半径 4 の円を表す。



問3 次の方程式が円を表すことを示し，中心と半径を求めよ。

(1) $x^2+y^2+2x+8y+1=0$

(2) $x^2+y^2-2x+4y=0$

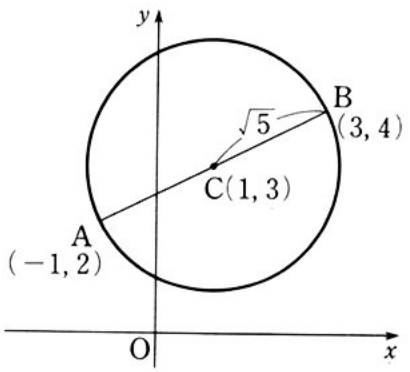
例題2 2点 $A(-1, 2)$，$B(3, 4)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

解 線分 AB の中点 $C(1, 3)$ が円の中心で，半径は CB である。

$$CB^2=(3-1)^2+(4-3)^2=5$$

よって，求める円の方程式は

$$(x-1)^2+(y-3)^2=5$$



問4 》 2点 A(−1, −1), B(3, 2) を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

問5 》 2点 A(a, 0), B(0, b) を直径の両端とする円は，原点を通ることを示せ。

例題3 》 3点 P(1, 5), Q(−5, −3), R(2, −2) を通る円の方程式を求めよ。

解 》 求める円の方程式を

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

とする。3点 P, Q, R は円の上にあるから，次の3つの方程式

$$1^2 + 5^2 + A + 5B + C = 0$$

$$(-5)^2 + (-3)^2 - 5A - 3B + C = 0$$

$$2^2 + (-2)^2 + 2A - 2B + C = 0$$

が成り立つ。これを A, B, C の連立方程式として解くと

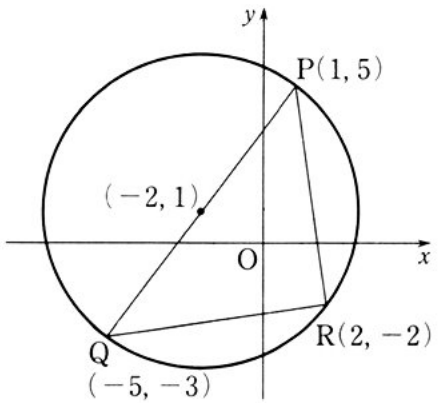
$A = 4,\ B = -2,\ C = -20$

よって

$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$

ゆえに

$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$



注意 〉 3点 P, Q, R を通る円を

△PQR の外接円という。その中心を **外心** という。

問6 》 3点 P(3, 8), Q(−4, 1), R(5, 4) を通る円の方程式を求めよ。

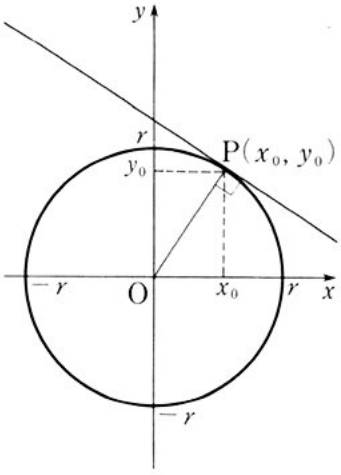
問7 》 3点 P(1, −1), Q(5, 1), R(−2, 0) を通る円の方程式を求めよ。また，その円の中心と半径を求めよ。

2 円の接線

円Oの上に任意の点Pをとる。Pを通り，半径OPに垂直な直線は，P以外に円Oと共有点をもたない。この直線を円Oの**接線**，点Pを**接点**という。このことを利用して，円

$$x^2 + y^2 = r^2$$

の上の任意の点 $P(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式を求めてみよう。



$x_0 \neq 0,\ y_0 \neq 0$ のとき，直線OPの傾きは $\dfrac{y_0}{x_0}$ であるから，接線の傾きは $-\dfrac{x_0}{y_0}$ である。

したがって，接線の方程式は

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$$

すなわち　　$x_0x + y_0y = {x_0}^2 + {y_0}^2$

点Pは円の上にあるから

$${x_0}^2 + {y_0}^2 = r^2$$

ゆえに　　$x_0x + y_0y = r^2$

$x_0 = 0$ または $y_0 = 0$ のときも，この方程式は接線を表している。

円の接線

円 $x^2 + y^2 = r^2$ の上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は

$$x_0x + y_0y = r^2$$

例2 円 $x^2 + y^2 = 25$ の上の点 $P(-3,\ 4)$, $Q(-5,\ 0)$, $R(0,\ 5)$ における接線の方程式は，それぞれ

$$-3x + 4y = 25,\quad x = -5,\quad y = 5$$

問8 円 $x^2 + y^2 = 5$ の上の点 $(1,\ 2)$，および点 $(-1,\ -2)$ における接線の方程式を求めよ。

3 円と直線の共有点

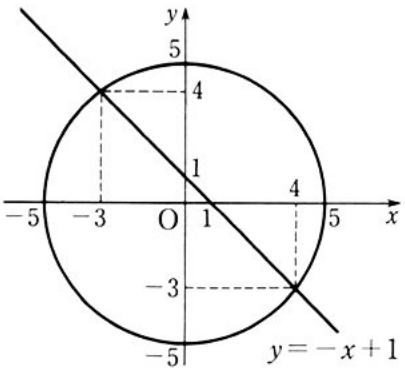
円と直線との共有点の座標は，それらを表す方程式を連立させたときの実数解として得られる。

例題4 円 $x^2+y^2=25$ と直線 $y=-x+1$ の共有点の座標を求めよ。

解 円　$x^2+y^2=25$　①

と直線　$y=-x+1$　②

とが共有点をもつとき，その座標は①，②を連立させたときの実数解として得られる。



②を①へ代入して整理すると

$$x^2-x-12=0,\quad (x+3)(x-4)=0$$

よって　$x=-3$ または $x=4$

これらを②へ代入して

$x=-3$ のとき $y=4$，$x=4$ のとき $y=-3$

ゆえに，求める共有点の座標は $(-3,\ 4),\ (4,\ -3)$ である。

問9 円 $x^2+y^2=16$ と次の直線との共有点の座標を求めよ。

(1) $y=\frac{1}{2}x-2$　　(2) $y=-x+2$

例題5 円 $x^2+y^2=9$ と直線 $y=mx+5$ が共有点をただ1つもつとき，m の値を求めよ。

解 共有点の x 座標は，連立方程式

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y=mx+5 \end{cases}$$

から y を消去した次の2次方程式

$$(m^2+1)x^2+10mx+16=0$$

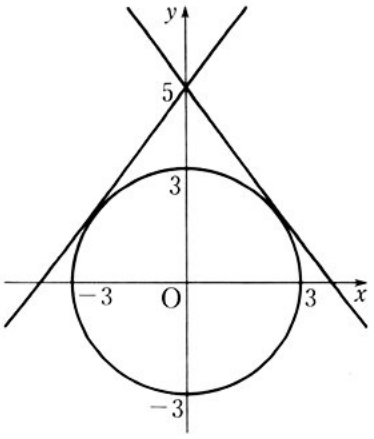
の実数解として得られる。

この2次方程式の判別式を D とすれば，共有点がただ1つである必要十分条件は，$D = 0$ になることである。したがって

$$\frac{D}{4} = 25m^2 - 16(m^2 + 1) = 0$$

すなわち　　$9m^2 - 16 = 0$

ゆえに　　$m = \pm\frac{4}{3}$



上の例題で，円と直線が2点で交わるのは $m < -\frac{4}{3}$, $m > \frac{4}{3}$ のときで，共有点をもたないのは $-\frac{4}{3} < m < \frac{4}{3}$ のときである。

問10 円 $x^2 + y^2 = 4$ と直線 $y = \frac{1}{2}x + b$ の共有点の個数は，b の値によってどう変わるかを調べよ。

練習問題

1. 次の方程式が円を表すことを示し，円の中心と半径を求めよ。

(1) $x^2 + y^2 - 3x + 5y - \frac{1}{2} = 0$

(2) $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 0$

2. 3点 P(−1, 3), Q(3, 1), R(2, 4) を通る円の方程式を求めよ。

3. 円 $x^2 + y^2 = 9$ の上の，次のそれぞれの点における接線の方程式を求めよ。

(1) $(-3, 0)$　　(2) $(1, -2\sqrt{2})$　　(3) $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

4. 円 $x^2 + y^2 = 8$ の上の点Pにおける接線が，点 $(0, 4)$ を通るという。接点Pの座標を求めよ。

5. 点 $(5, -15)$ から，円 $x^2 + y^2 = 25$ にひいた2本の接線の方程式を求めよ。

〖5節〗 軌跡の方程式

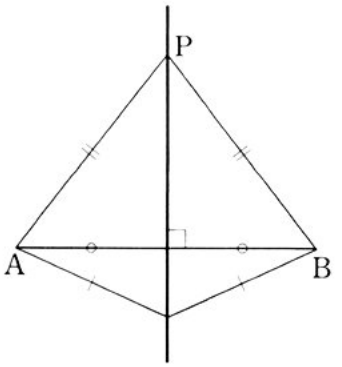
座標平面上において，円は定点Cから一定の距離 r にある点Pの集合で，これは

$$\{P \mid CP = r\}$$

とも書かれる。また，線分ABの垂直二等分線は，2定点A, Bから等しい距離にある点Pの集合で，これは

$$\{P \mid AP = BP\}$$

である。このように，与えられた条件を満たしながら移動する点のえがく図形を，その条件を満たす点の **軌跡** という。



問1 〉 次のそれぞれの条件を満たす点の軌跡はどんな図形をえがくか。

(1) 直線 l からの距離が，一定の値 d である点

(2) A, Bを2定点とするとき，$\angle APB = 90^\circ$ となる点P

(3) 2定点A, Bを通る円の中心

(4) 点Oで交わる2直線から等しい距離にある点

座標平面上で，与えられた条件を満たす点 $P(x, y)$ の軌跡を，x, y の方程式で表すことを考えてみよう。

例題1 〉 点 $A(0, 1)$, $B(1, 0)$ から等しい距離にある点 $P(x, y)$ の軌跡を求めよ。

解 〉 $PA = PB$ であるから

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

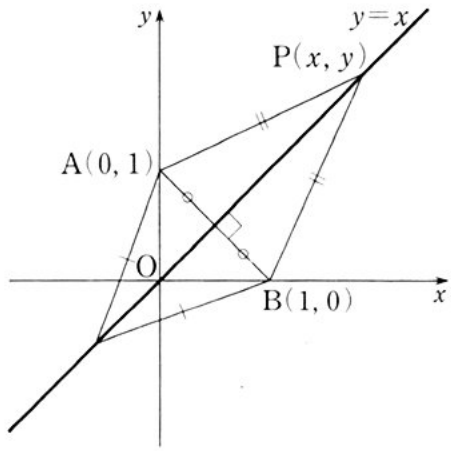
両辺を平方して整理すると

$$y = x$$

したがって，条件を満たす点 P(x, y) はこの方程式を満たす。

逆に，方程式 $y = x$ の表す直線上に任意の点 P をとれば，つねに PA = PB が成り立つ。

ゆえに，求める点 P の軌跡は，直線 $y = x$ である。



一般に，座標平面上で，与えられた条件を満たす点 P(x, y) の軌跡を求めるには，次の手順をとる。

(1)　点 P(x, y) が，与えられた条件を満たすとして x, y の関係を方程式に表し，その図形を求める。

(2)　図形上の点が，与えられた条件を満たすことを確かめる。

これらのうち，(1) の求め方から (2) は明らかであることが多い。このような場合には，(2) は省略してもよい。

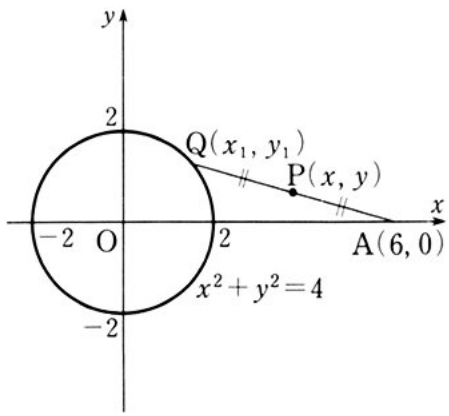
問2 》 座標平面上に 2 点 A$(-1, 0)$, B$(1, 0)$ がある。点 P(x, y) が $AP^2 + BP^2 = 10$ を満たすとき，点 P の軌跡を求めよ。

例題2 》 点 A$(6, 0)$ と円 $x^2 + y^2 = 4$ の上の任意の点 Q とを結ぶ線分の中点 P(x, y) の軌跡を求めよ。

解 》 円上の点 Q の座標を (x_1, y_1) とすると，P は AQ の中点であるから

$$x = \frac{x_1 + 6}{2} \qquad ①$$

$$y = \frac{y_1}{2} \qquad ②$$



Q は円の上にあるから

$$x_1^2 + y_1^2 = 4 \qquad ③$$

①, ② から　　$x_1 = 2x - 6, \quad y_1 = 2y$

これらを ③ に代入して

$$(2x - 6)^2 + (2y)^2 = 4$$

すなわち　　$(x - 3)^2 + y^2 = 1$

ゆえに，点 P の軌跡は中心 (3, 0)，半径 1 の円である。

問3 》 点 A(− 1, 3) と直線 $y = x$ の上の点を結ぶ線分の中点 P の軌跡を求めよ。

問4 》 2 点を A(− 1, 0), B(1, 0) とする。点 P(x, y) が

$$AP^2 - BP^2 = 10$$

を満たすとき，点 P の軌跡を求めよ。

《 練習問題 》

1. 点 A(4, 7) と直線 $y = -2x + 3$ の上の任意の点 Q とを結ぶ線分 AQ の上にあって，AQ を 1 : 2 に内分する点 P の軌跡を求めよ。

2. 点 A(0, 8) と円 $x^2 + y^2 = 4$ の上の任意の点 Q とを結ぶ線分の中点 P(x, y) の軌跡を求めよ。

3. 2 点 A(− 1, 0), B(1, 0) に対して，次の条件を満たす点 P(x, y) の軌跡を求めよ。

(1)　$PA = \sqrt{2}\,PB$

(2)　$2AP^2 - BP^2 = 8$

〖6節〗 不等式の表す領域

1 不等式の表す領域

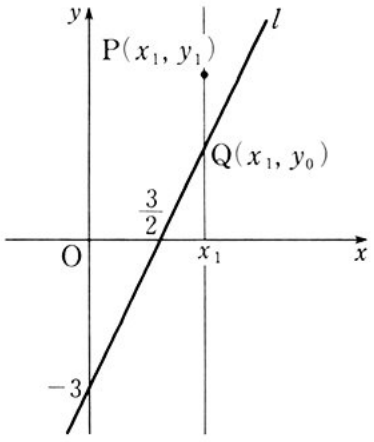
x と y についての方程式

$$y = 2x - 3$$

を満たす点 (x, y) の集合は，右の図の直線 l である。以下では，不等式

$$y > 2x - 3 \qquad ①$$

を満たす点 (x, y) の集合を考える。



座標平面上に点 $P(x_1, y_1)$ をとる。点 P を通り x 軸に垂線をひいて，直線 l との交点を $Q(x_1, y_0)$ とすると，Q は l 上にあるから

$$y_0 = 2x_1 - 3$$

点 P が直線 l の上側にあれば，$y_1 > y_0$ であるから

$$y_1 > 2x_1 - 3 \qquad ②$$

すなわち，直線 l の上側の点 P は不等式 ① を満たす。

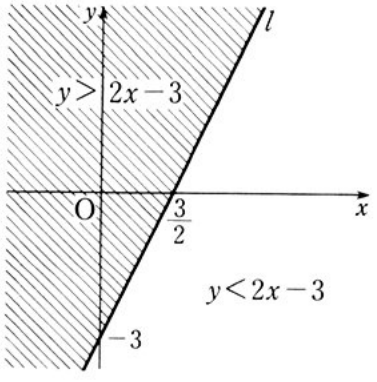
逆に，② が成り立てば，$y_1 > y_0$ であるから，不等式 ① を満たす点 P は直線 l の上側にある。

したがって，① を満たす点 (x, y) の集合は，直線 l の上側の点の集合である。

同様にして，不等式

$$y < 2x - 3$$

を満たす点 (x, y) の集合は，直線 l の下側の点の集合である。



不等式を満たす点 (x, y) の集合を，不等式の表す **領域** という。

一般に，次のことが成り立つ。

1次不等式の表す領域

$y > mx + n$ の表す領域は，直線 $y = mx + n$ の上側

$y < mx + n$ の表す領域は，直線 $y = mx + n$ の下側

領域を表す不等式が $>$, $<$ を用いて表されているときは，領域の境界を含まない。また，$\geqq$, $\leqq$ で表されているときは，境界を含む。

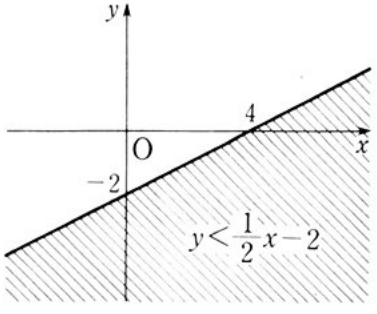
例題1 不等式 $x - 2y > 4$ の表す領域を図示せよ。

解 与えられた不等式を変形して

$$y < \frac{1}{2}x - 2$$

したがって，求める領域は，直線 $y = \frac{1}{2}x - 2$ の下側の領域で，右の図の斜線の部分である。

ただし，境界を含まない。

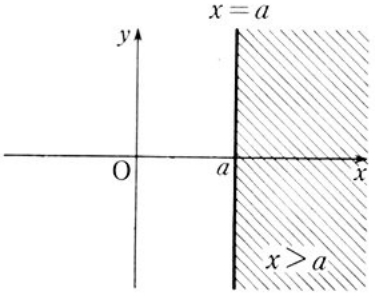


問1 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $y > 3x - 5$　　(2) $y \geqq 2x - 4$

座標平面上で，不等式 $x > a$ を満たす点 (x, y) は，直線 $x = a$ の右側にある。

したがって，不等式 $x > a$ の表す領域は，直線 $x = a$ の右側の領域で，境界を含まない。



問2 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $x + 2y - 5 < 0$　　(2) $2x + 3y - 6 \geqq 0$

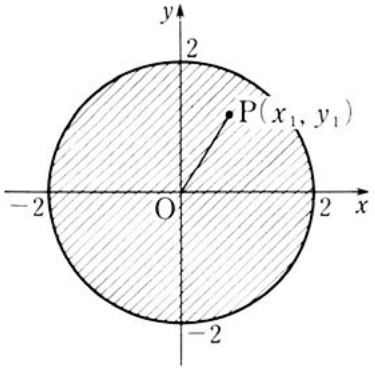
(3) $x - 2 \leqq 0$　　(4) $y + 1 > 0$

2 円の内部と外部

不等式

$$x^2 + y^2 < 4$$

の表す領域を考えてみよう。



座標平面上で任意の点 $P(x_1, y_1)$ をとると，原点 O との距離の平方 OP^2 は

$$OP^2 = x_1^2 + y_1^2$$

点 P が円 $x^2 + y^2 = 4$ の内部にあれば，$OP < 2$ であるから

$$x_1^2 + y_1^2 < 4$$

逆に，$x_1^2 + y_1^2 < 4$ が成り立てば，点 P は円の内部にある。

したがって，不等式

$$x^2 + y^2 < 4$$

の表す領域は，円 $x^2 + y^2 = 4$ の内部で，境界を含まない。

同様にして，不等式

$$x^2 + y^2 > 4$$

の表す領域は，円 $x^2 + y^2 = 4$ の外部で，境界を含まない。

一般に，円が方程式

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

で表されるとき，次のことがいえる。

円の内部と外部

$(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$ の表す領域は，円の内部

$(x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2$ の表す領域は，円の外部

例題2 不等式 $x^2 + y^2 - 6x + 8y \geqq 0$ の表す領域を図示せよ。

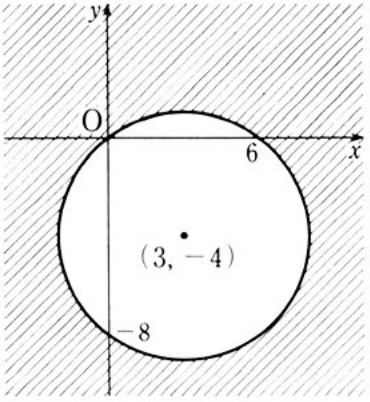
解 与えられた不等式を変形すると

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 \geqq 25$$

この不等式を満たす点の集合は，中心 $(3, -4)$，半径 5 である円

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$$

の外部で，境界である円周を含む。



問3 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $x^2 + (y - 1)^2 > 4$　　(2) $x^2 + y^2 + 2x - 6y \leqq 0$

3 連立不等式の表す領域

たとえば，次の 2 つの不等式

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 > 0 & \text{①} \\ x - 2y - 2 < 0 & \text{②} \end{cases}$$

を同時に満たす点の領域を考えてみよう。

不等式 ① の表す領域は，直線

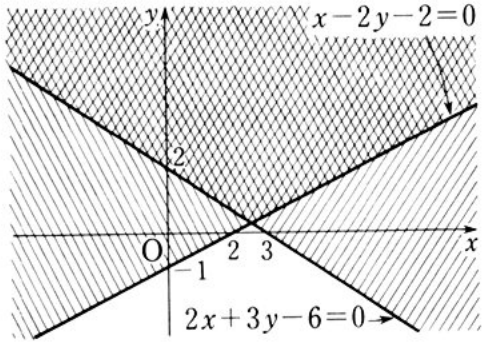
$$2x + 3y - 6 = 0$$

の上側の部分で，境界を含まない。

不等式 ② の表す領域は，直線

$$x - 2y - 2 = 0$$

の上側の部分で，境界を含まない。



したがって，与えられた 2 つの不等式を同時に満たす点の領域は，これら 2 つの領域の共通部分として表せる。上の図で斜線の重なった部分が，この連立不等式の表す領域である。ただし，境界は含まない。

問4 次の不等式を同時に満たす点 (x, y) の領域を図示せよ。

(1) $\begin{cases} x+y<0 \\ -2x+3y>-6 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x-y>-3 \\ 3x+y<3 \end{cases}$

例題3 次の不等式を同時に満たす点 (x, y) の領域を図示せよ。

$$\begin{cases} x-y-1 \leqq 0 \\ x^2+y^2-4 \leqq 0 \end{cases}$$

解 不等式 $x-y-1 \leqq 0$ の表す領域は，直線

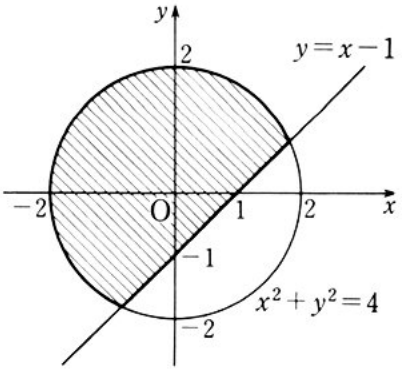
$$y=x-1$$

の上側の部分で，境界を含む。

不等式 $x^2+y^2-4 \leqq 0$ の表す領域は，円

$$x^2+y^2=4$$

の内部で，境界を含む。



したがって，求める領域は，これら2つの領域の共通部分で，上の図の斜線部分である。ただし，境界を含む。

問5 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $\begin{cases} y<x-1 \\ x^2+y^2>4 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x \geqq 3 \\ x^2+y^2-2x+4y \geqq 11 \end{cases}$

例題4 不等式 $(x+y)(x-y+2)<0$ の表す領域を図示せよ。

解 与えられた不等式は

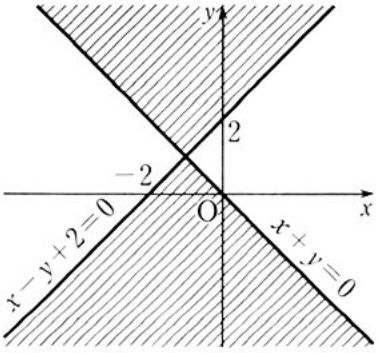
$$\begin{cases} x+y>0 \\ x-y+2<0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x+y<0 \\ x-y+2>0 \end{cases}$$

と同値である。連立不等式

$$\begin{cases} x+y>0 \\ x-y+2<0 \end{cases}$$

の表す領域は，直線 $x+y=0$ の上側の部分と，直線 $x-y+2=0$ の上側の部分の共通部分である。次に連立不等式

$$\begin{cases} x+y<0 \\ x-y+2>0 \end{cases}$$



の表す領域は，直線 $x+y=0$ の下側の部分と，直線 $x-y+2=0$ の下側の部分の共通部分である。したがって，求める領域は，この2つの領域の和集合で，図の斜線の部分である。ただし，境界は含まない。

問6 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $(2x+y)(x-y+3)>0$

(2) $(x+y+1)(3x+y-3)\leqq 0$

4 領域と最大値・最小値

点 $P(x, y)$ がいくつかの不等式で表される領域の中を動くとき，x と y についての1次式の最大値と最小値について調べてみよう。

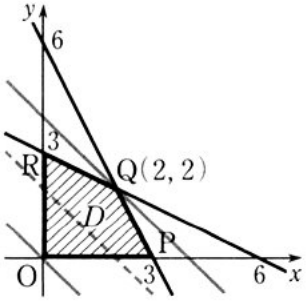
例題5 次の不等式

$$x\geqq 0,\quad y\geqq 0,\quad 2x+y\leqq 6,\quad x+2y\leqq 6$$

を同時に満たす点の領域 D を図示せよ。また，点 $P(x, y)$ が領域 D の中を動くとき，$x+y$ の最大値と最小値を求めよ。

解 領域 D は，右の図の斜線の部分，すなわち四角形 OPQR の内部で，境界である四角形の周を含む。

$x+y=k$



とおくと，k はこの直線と y 軸との交点の y 座標を表し，k の値が変わると，直線は平行移動する。直線が領域 D と共有点をもてば，その点で1次式は値 k をとる。

したがって，この直線が領域 D と共有点をもつとき，k が最大となるのは点 Q $(2, 2)$ を通るときである。そのとき，k の値は4となる。また，k の値が最小となるのは原点 O $(0, 0)$ を通るときで，このとき，k の値は0となる。

ゆえに，$x + y$ は，$x = 2, y = 2$ のとき最大値4をとり，$x = 0, y = 0$ のとき最小値0をとる。

問7 x, y が不等式

$$x - 2y + 2 \geqq 0, \quad 2x + y - 1 \leqq 0, \quad y \geqq 0$$

を同時に満たすとき，$x + y$ の最大値と最小値を求めよ。

練習問題

1. 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $2x - y + 1 > 0$

(2) $x^2 + y^2 - 4x + 2y \leqq 1$

(3) $(x + y)(x - y) > 0$

2. 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $\begin{cases} 2x + y < 5 \\ y < 1 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} y \leqq x + 1 \\ x^2 + y^2 \leqq 9 \end{cases}$

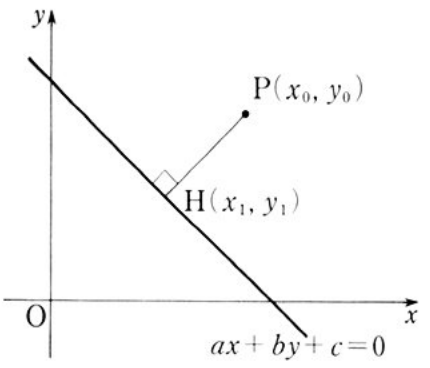
3. 連立不等式

$$\begin{cases} x \geqq 0 \\ x - 3y + 2 \leqq 0 \\ x + y - 2 \leqq 0 \end{cases}$$

を同時に満たす x, y について，$2x + y$ の最大値と最小値を求めよ。

発展　点と直線の距離

点と直線の距離の求め方については3節で学んだが，ここではその公式を求めてみよう。



点 $P(x_0, y_0)$ から直線

$$ax + by + c = 0 \qquad ①$$

に垂線をひき，直線との交点を $H(x_1, y_1)$ とする。$a \neq 0,\ b \neq 0$ のとき，

直線①の傾きは $-\dfrac{a}{b}$ であるから，垂線PHの傾きは $\dfrac{b}{a}$ である。

よって $$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{b}{a}$$

また，$H(x_1, y_1)$ は直線①の上にあるから

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \qquad ②$$

ここで，$\dfrac{y_1 - y_0}{b} = \dfrac{x_1 - x_0}{a} = k$ とおくと

$$x_1 = x_0 + ak, \quad y_1 = y_0 + bk$$

これと②より $$a(x_0 + ak) + b(y_0 + bk) + c = 0$$

したがって $$k = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$$

2点 $P(x_0, y_0)$, $H(x_1, y_1)$ 間の距離を求めると

$$PH = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \sqrt{(ak)^2 + (bk)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\,|k| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ゆえに，点 $P(x_0, y_0)$ と直線 $ax + by + c = 0$ の距離は

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

となる。なお，この公式は，$a = 0,\ b \neq 0$，または $a \neq 0,\ b = 0$ のときも成り立つ。

○　点 $(1, 2)$ と，次のそれぞれの直線との距離を求めてみよ。

(1)　$4x + 3y + 5 = 0$　　(2)　$y = 2x - 5$

第6章の問題

A

1. 平面上の2点を A(−2, 3), B(1, 4) とする。

(1) 2点間の距離 AB を求めよ。

(2) 線分 AB の中点の座標を求めよ。

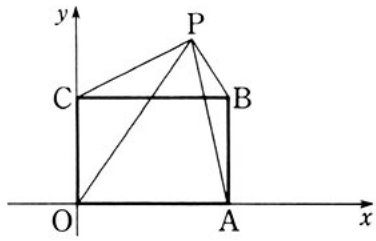
(3) 線分 AB を 2:1 に内分する点の座標を求めよ。

(4) 線分 AB を 3:5 に外分する点の座標を求めよ。

2. 座標平面上に長方形 OABC を右の図のようにとる。任意の1点 P をとるとき

$$PO^2 + PB^2 = PA^2 + PC^2$$

が成り立つことを証明せよ。



3. 点 A の座標を (5, −7), 直線 l の方程式を $2x + 3y + 6 = 0$ とするとき，次の条件を満たす方程式を求めよ。

(1) 点 A を通り，l に平行な直線　　(2) 点 A を通り，l に垂直な直線

4. 3点 A(−2, −3), B(2, 5), C($a+1$, $a-2$) が同一直線上にあるように，定数 a の値を定めよ。

5. 次の3つの直線が1点で交わるとき，a の値を求めよ。

$$2x + 3y + 4 = 0,\quad 3x - 2y + a - 4 = 0,\quad 5x + 7y - 3a = 0$$

6. 点 (3, −2) を中心として，次の条件を満たす円の方程式を求めよ。

(1) 原点を通る。　　(2) (−1, −1) を通る。

(3) x 軸に接する。　　(4) y 軸に接する。

7. 2点 A(1, 5), B(−4, 2) を結ぶ線分について，その垂直二等分線の方程式を求めよ。

8. 点 A(0, 3) と直線 $y = x$ の上の点 Q(x_1, y_1) を結ぶ線分上で，AQ を 2:3 に内分する点 P の軌跡を求めよ。また，AQ を 1:2 に外分する点 R の軌跡を求めよ。

9. 2点 A(−1, 2), B(1, −3) が与えられているとき，

$$2AP^2 - BP^2 = 1$$

を満たす点Pの軌跡を求めよ。

10 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\begin{cases} y > 3x + 1 \\ x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 < 0 \end{cases}$$

B

1. 正三角形ABCについて，頂点の座標を A(−1, −2), B(3, 0) とするとき，残りの頂点Cの座標を求めよ。

2. 直線 l の方程式を $y = 2x - 1$ とする。l に関して点 A(−1, 5) と対称な点の座標を求めよ。

3. x と y についての方程式 $x^2 + y^2 + 7x + k = 0$ が点 (−2, 3) を通る円を表すとき，k の値を求めよ。また，その円の中心の座標と半径を求めよ。

4. 円 $x^2 + y^2 = 5$ の上の点Pにおける接線が点 (3, −1) を通るとき，接点Pの座標を求めよ。

5. 円 $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ と直線 $y = mx + 1$ との共有点の個数は，m の値によってどのように変わるか。

6. 2点 A(−4, 0), B(1, 0) について，AP : BP = 2 : 1 となるような点Pの軌跡を求めよ。

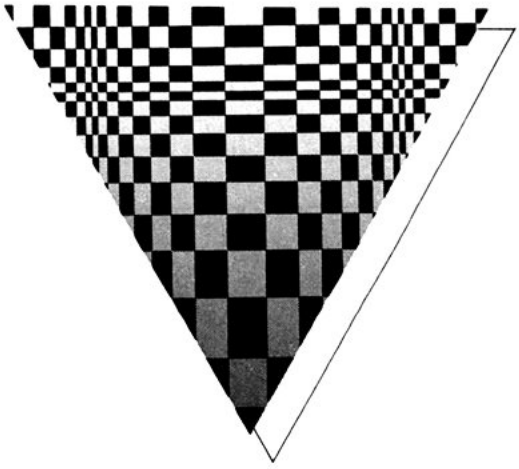
7. 次の不等式の表す領域を図示せよ。

$$(x + 2y - 3)(x^2 + y^2 - 4) \geqq 0$$

8. 点 P(x, y) が不等式

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad 3x + y \leqq 7, \quad x + 3y \leqq 7$$

を同時に満たすとき，$x + y$ の最大値と最小値を求めよ。



第7章 三角比

1節・鋭角の三角比
2節・三角比の相互関係
3節・三角比の拡張
4節・正弦定理と余弦定理

古代の数学は実用的かつ技術的なものが中心であった。この章で学ぶ三角比は古くから研究され，エジプトにおけるピラミッドなどの土木工事にはじまって，天体観測や航海術などに広く用いられた。紀元後2世紀のプトレマイオスは著書『アルマゲスト』において，弦の表を与え，10世紀のアラビアの数学者は実用に便利な三角比の表を作り，三角法の実用化に貢献した。

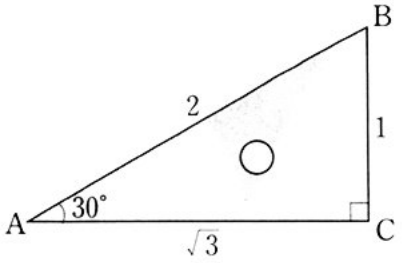
そして，三角比の概念は，座標や関数の概念とも結びついて一般化されて発展し，科学技術の進歩にも大きく貢献した。

したがって，この章の内容は，古くからあるものであるが，現在の社会生活の中で広く応用されているものでもある。

〖1節〗 鋭角の三角比

1 正弦，余弦，正接

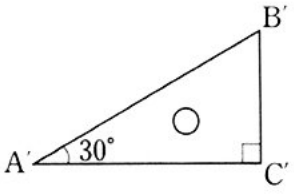
1つの角が30°で，大きさの異なる相似な三角定規がある。3つの辺の比は，右の図に与えられている。したがって，



△ABC について

$$\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2},\ \frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{BC}{AC}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

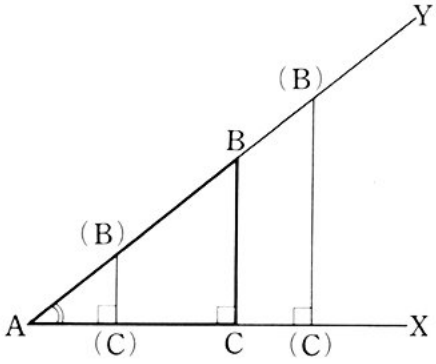
であり，△A′B′C′ についても



$$\frac{B'C'}{A'B'}=\frac{1}{2},\ \frac{A'C'}{A'B'}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{B'C'}{A'C'}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

が成り立つ。これらの辺の比の値は，△ABC や △A′B′C′ が大きくても小さくても，変わらない。

右の図のように，鋭角 ∠XAY＝∠A が与えられたとする。半直線 AY 上の1点Bから半直線 AX に垂線 BC をひき，直角三角形 ABC をつくると，B が半直線 AY 上のどこにあっても，



$$\frac{BC}{AB},\quad \frac{AC}{AB},\quad \frac{BC}{AC}$$

の値はそれぞれ一定である。これらの値は，∠A の大きさ A だけで定まる。そこで

$\frac{BC}{AB}$ を ∠A の **正弦** または **サイン** といい，**sin A** で表す。また，

$\frac{AC}{AB}$ を ∠A の **余弦** または **コサイン** といい，**cos A** で表す。そして

$\frac{BC}{AC}$ を ∠A の **正接** または **タンジェント** といい，**tan A** で表す。
これら正弦，余弦，正接をまとめて，∠A の **三角比** という。

問1 前ページの三角定規の図を用いて，次の値を求めよ。

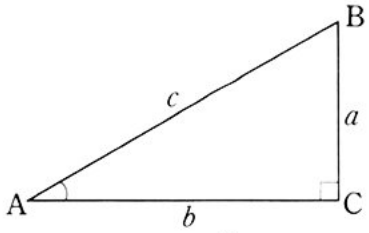
(1)　$\sin 30^\circ$　　(2)　$\cos 30^\circ$　　(3)　$\tan 30^\circ$

三角比のまとめ

右の図の直角三角形 ABC において，各辺の長さを

$BC = a,\ AC = b,\ AB = c$

とするとき



$$\sin A = \frac{a}{c},\quad \cos A = \frac{b}{c},\quad \tan A = \frac{a}{b}$$

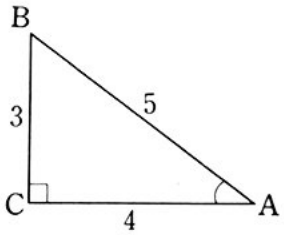
$$a = c\sin A,\quad b = c\cos A,\quad a = b\tan A$$

例1 右の図について，∠A の正弦，余弦，正接は，

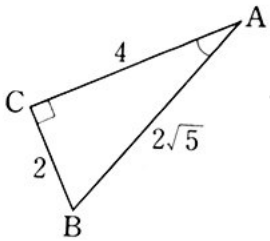
$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5},\ \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{5}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4}$$

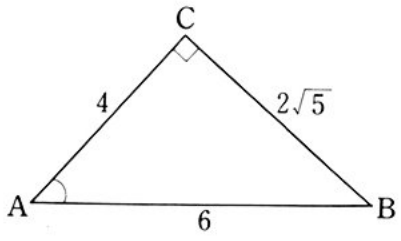
となる。



問2 下の図の ①，② について，∠A および ∠B の正弦，余弦，正接を求めよ。

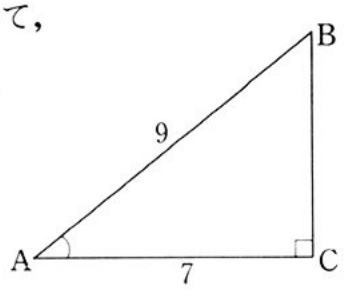


図①



図②

例題1 右の図の直角三角形ABCについて，AB＝9, AC＝7とする。このとき，∠Aの正弦，余弦，正接を求めよ。



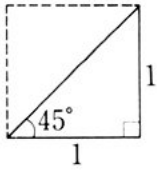
解 三平方の定理により

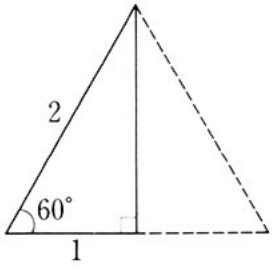
$$BC = \sqrt{9^2 - 7^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

したがって

$$\sin A = \frac{4\sqrt{2}}{9},\ \cos A = \frac{7}{9},\ \tan A = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

問3 45°と60°の正弦，余弦，正接をそれぞれ求めよ。ただし，これらを求めるのに右の図を用いよ。





以上のことから，30°, 45°, 60°の三角比は，次のようにまとめられる。

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2},\quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \tan 45^\circ = 1$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2},\quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

2 三角比の値

鋭角の三角比の値は，巻末の三角比の表に示されている。

例2 20°の三角比の値は，三角比の表から次のようになる。

$$\sin 20^\circ = 0.3420,\quad \cos 20^\circ = 0.9397,\quad \tan 20^\circ = 0.3640$$

上のまとめのように，$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ である。$\sqrt{3}$ は無理数で

$$\sqrt{3} = 1.7320508\cdots\cdots$$

である。三角比の表によれば

$$\tan 60^\circ = 1.7321$$

とあり，数表では小数第5位を四捨五入した近似値が示されている。近似値は記号 ≒ を用いて表すが，数表の値の場合には，等号を用いる。

問4 》 三角比の表から，次の値をいえ。

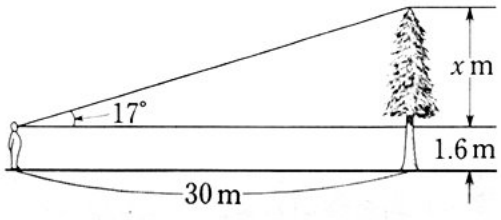
(1) $\sin 21^\circ$　　(2) $\cos 69^\circ$　　(3) $\tan 84^\circ$

例3 》 $\tan A = 0.6$ となる角 A を求めるには，数表で正接の値が0.6にいちばん近い値0.6009を見つけて，角を読み $A = 31^\circ$ とする。

問5 》 三角比の表から，次の等式を満たす角を求めよ。

(1) $\sin A = 0.2924$　　(2) $\cos A = 0.39$　　(3) $\tan A = 1.6$

例題2 》 校庭の杉の木の根元から30 m離れた地点で，木の先端を見上げた角が図のように17°あった。杉の木の高さを求めよ。ただし，目の高さは1.6 mとする。



解 》 目の高さから上の杉の木の高さを x m とすると

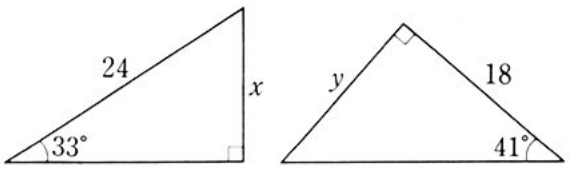
$$\frac{x}{30} = \tan 17^\circ = 0.3057$$

よって　　$x = 30 \times 0.3057 = 9.171$

$$9.171 + 1.6 = 10.771 \fallingdotseq 10.8$$

ゆえに木の高さは　　約10.8 m

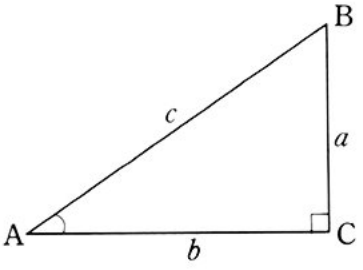
問6 》 三角比の表を用いて，右のそれぞれの直角三角形について，辺の長さ x, y を求めよ。



〖2節〗 三角比の相互関係

1 正弦，余弦，正接の関係

次の図のような直角三角形 ABC を用いて，正弦，余弦，正接の関係を調べてみよう。



$a = c\sin A, \qquad b = c\cos A$

である。したがって

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{c\sin A}{c\cos A} = \frac{\sin A}{\cos A}$$

正弦，余弦，正接の関係

$$\boldsymbol{\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}}$$

問1 直角三角形 ABC について，∠ A が 30°, 45°, 60° のとき，上の公式を確かめよ。

上の図の直角三角形 ABC について，三平方の定理より，

$$a^2 + b^2 = c^2$$

である。両辺を c^2 で割ると

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

すなわち　　$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$

$(\sin A)^2, (\cos A)^2$ などを，ふつう $\sin^2 A, \cos^2 A$ と書く。

したがって，次の公式が得られる。

三角比の2乗の和の公式

$$\boldsymbol{\sin^2 A + \cos^2 A = 1}$$

問2 次の等式が成り立つことを示せ。

$$1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$$

例題1 直角三角形ABCについて，$\cos A = \frac{3}{5}$ のとき，$\sin A$ と $\tan A$ を求めよ。

解 三角比の2乗の和の公式により

$$\sin^2 A + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 A = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

両辺の正の平方根をとり　　$\sin A = \frac{4}{5}$

$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ であるから

$$\tan A = \frac{4}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{4}{3}$$

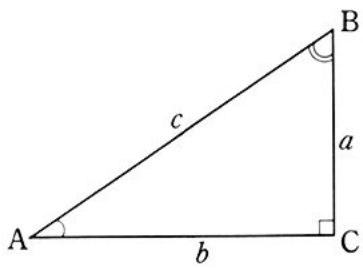
問3 直角三角形ABCについて，$\sin A = \frac{12}{13}$ のとき，$\cos A$ と $\tan A$ を求めよ。

2 $90^\circ - A$ の三角比

右の図の直角三角形ABCについて

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c}$$

$$\sin B = \frac{b}{c}, \quad \cos B = \frac{a}{c}$$



である。したがって

$$\sin A = \cos B, \quad \cos A = \sin B$$

が成り立つ。ここで

$$A + B = 90^\circ \quad \text{すなわち} \quad B = 90^\circ - A$$

であるから，次の関係式が得られる。

$90^\circ - A$ の三角比

$$\cos(90^\circ - A) = \sin A$$
$$\sin(90^\circ - A) = \cos A$$

問4 $\tan A = \dfrac{1}{\tan(90^\circ - A)}$ が成り立つことを示せ。

例1 $\sin 75^\circ = \cos(90^\circ - 75^\circ) = \cos 15^\circ$

$\cos 75^\circ = \sin(90^\circ - 75^\circ) = \sin 15^\circ$

$\tan 75^\circ = \dfrac{1}{\tan(90^\circ - 75^\circ)} = \dfrac{1}{\tan 15^\circ}$

問5 次の三角比を，45° より小さい角の三角比で表せ。

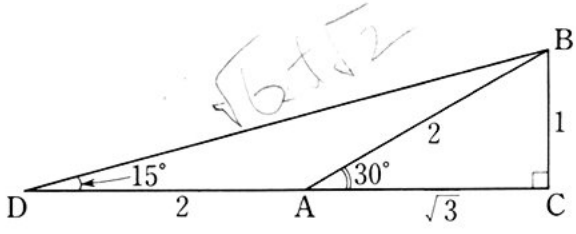
(1) $\sin 67^\circ$　　(2) $\cos 78^\circ$　　(3) $\tan 56^\circ$

練習問題

1. 直角三角形 ABC で，$\cos A = \dfrac{2}{3}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin A$　　(2) $\tan A$　　(3) $\tan(90^\circ - A)$

2. 右の図を利用して，15° および 75° の正弦，余弦，正接のそれぞれの値を求めよ。



3. $A + B = 90^\circ$, $A > 0^\circ$, $B > 0^\circ$ のとき，次の式が成り立つことを示せ。

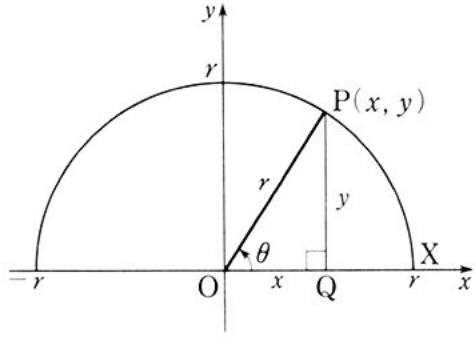
(1) $\tan A \tan B = 1$　　(2) $\sin A + \sin B > 1$

〖3節〗 三角比の拡張

1 0°から180°までの角の三角比

いままで鋭角の三角比について学んできた。ここでは，座標の考えを用いて，0°から180°までの角の三角比を考えてみよう。

原点Oを中心として半径 r の半円をかき，右の図のように鋭角 θ をとる。次に，半円上に $\angle XOP = \theta$ である点Pをとり，その座標を (x, y) とする。Pから x 軸へ垂線PQをひくと



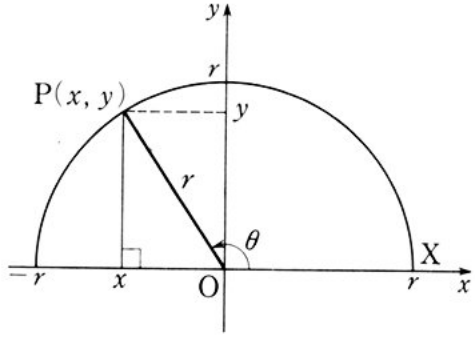
$$\sin\theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{x}{r},\ \tan\theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x}$$

したがって，三角比の値は，半円の半径 r と点Pの座標 (x, y) によって表される。

次に，θ が $0° \leqq \theta \leqq 180°$ の場合，右の図のように，

$$\angle XOP = \theta$$

である点 $P(x, y)$ をとる。このとき，θ の正弦，余弦，正接を



$$\boldsymbol{\sin\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \tan\theta = \frac{y}{x}}$$

で定義する。

とくに，$\theta = 0°, 90°, 180°$ の三角比については，Pの座標はそれぞれ $(r, 0), (0, r), (-r, 0)$ となるので，次のようになる。

0°, 90°, 180° の三角比

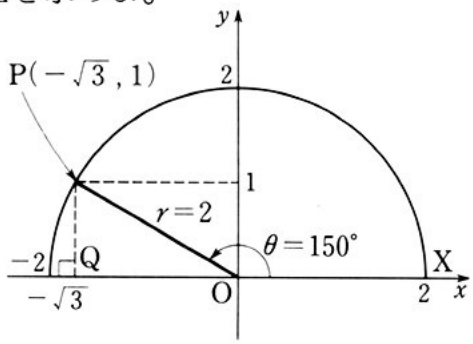
$\sin 0° = 0$	$\cos 0° = 1$	$\tan 0° = 0$
$\sin 90° = 1$	$\cos 90° = 0$	——
$\sin 180° = 0$	$\cos 180° = -1$	$\tan 180° = 0$

〈注意〉 $\tan 90°$ は，$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ の x が 0 となるので，定義されない。

問1 〉 $\theta = 0°, 90°, 180°$ の三角比が，上のようになることを確かめよ。

例題1 〉 $150°$ の正弦，余弦，正接の値を求めよ。

解 〉 右の図のように，$r = 2$ の半円をかき，$\theta = 150°$ である点 P をとると，P の座標は $(-\sqrt{3}, 1)$ となる。



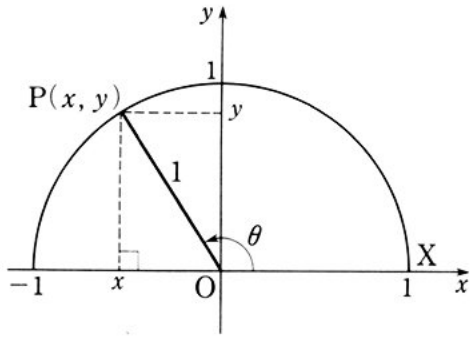
よって

$$\sin 150° = \frac{1}{2},\quad \cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \tan 150° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

問2 〉 例題1にならって，$120°$ の正弦，余弦，正接の値を求めよ。

問3 〉 $r = \sqrt{2}$ の半円をかき，$135°$ の正弦，余弦，正接の値を求めよ。

右の図のように，原点 O を中心として半径 1 の半円をかき，半円上に $\angle XOP = \theta$ となる点 $P(x, y)$ をとると，$r = 1$ であるから，θ の三角比は x, y のみによって表される。



この場合，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ となる θ について，三角比は

$$\sin\theta = y,\quad \cos\theta = x,\quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

問4 次の表の空欄を埋めて，表を完成せよ。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$									
$\cos\theta$									
$\tan\theta$					——				

$180^\circ - \theta$ の三角比

右の図のように，原点Oを中心に半径1の半円をかき，$\angle XOP = \theta$ となる点 $P(x, y)$ をとる。

次に，y 軸に関してPと対称な点 P' をとると

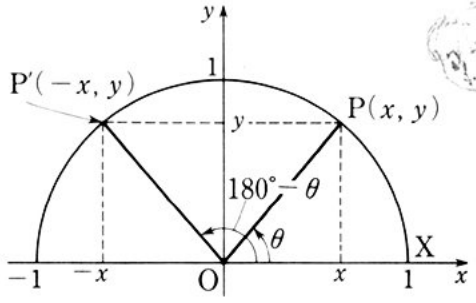
$$\angle XOP' = 180^\circ - \theta$$

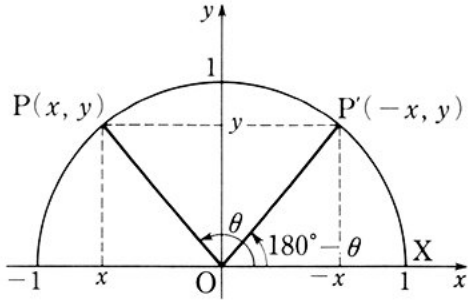
であり，$P'(-x, y)$ となる。

よって

$$\sin\theta = y, \quad \cos\theta = x,$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$





$\sin(180^\circ-\theta)=y$,　$\cos(180^\circ-\theta)=-x$,　$\tan(180^\circ-\theta)=-\dfrac{y}{x}$

したがって，次の関係式が得られる。

$180^\circ - \theta$ の三角比

$$\boldsymbol{\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta}$$
$$\boldsymbol{\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta}$$
$$\boldsymbol{\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta}$$

例1 $\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\dfrac{1}{2}$

$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

問5 例1にならって，$\cos 135^\circ$ と $\tan 150^\circ$ の値を求めよ。

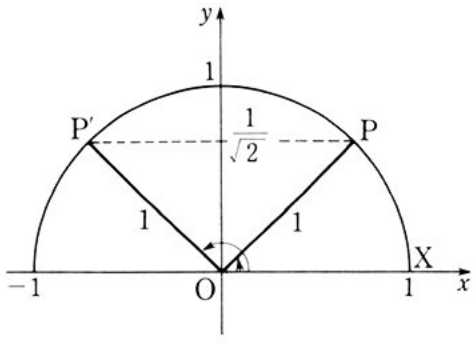
例題2 $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ である θ を，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲で求めよ。

解 右の図のように半円をとると，$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ は，2点P，P′のy座標を示す。したがって

$\angle XOP = 45^\circ$,

$\angle XOP' = 135^\circ$

ゆえに　　$\theta = 45^\circ, 135^\circ$



別解 $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ は，θ が鋭角のとき 45° である。また，鈍角のときは，$\sin\theta = \sin(180^\circ - 45^\circ)$ であるから，θ は 135° である。

問6 次の等式を満たす θ を，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲で求めよ。

(1) $\sin\theta = \frac{1}{2}$　　(2) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$　　(3) $\tan\theta = -1$

2 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のときの三角比の相互関係

関係式

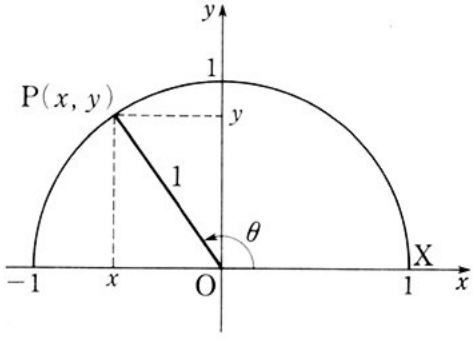
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

は，次のように，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のときにも成り立つことがわかる。

右の図のように半円をとると，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ において

$\sin\theta = y$,　$\cos\theta = x$,

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$



となる。また，点Pが半円上のどこにあっても $x^2 + y^2 = 1$ であるから

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = y^2 + x^2 = 1$$

が成り立つ。

問7 》 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ が成り立つことを確かめよ。

例題3 》 $\tan\theta = -3$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

解 》 $\tan\theta < 0$ であるから，θ は鈍角である。

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 10$$

よって　　$\cos^2\theta = \dfrac{1}{10}$

θ が鈍角のとき，$\cos\theta < 0$ であるから

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

次に，$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = -3 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

わからなくなったら、

を書いて

三平方

$\sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$

だから

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$

問8 》 $\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

練習問題

1. 次の計算をせよ。

(1) $\cos 125^\circ + \cos 55^\circ$

(2) $\sin 125^\circ \sin 55^\circ - \cos 55^\circ \cos 125^\circ$

2. $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ として，次の問に答えよ。

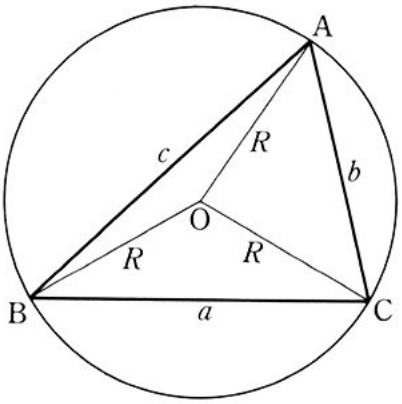
(1) $\tan\theta = -2$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。

(2) $\cos\theta = -\dfrac{1}{5}$ のとき，$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

〖4節〗 正弦定理と余弦定理

1 正弦定理

この節では，△ ABC の 3 つの角の大きさを A, B, C で，頂点 A, B, C の対辺の長さを a, b, c でそれぞれ表すことにする。



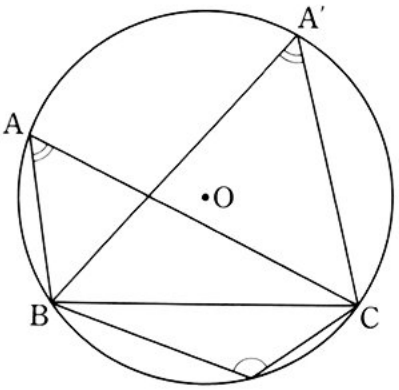
△ ABC の外接円の半径を R とする。このとき，三角形の辺の長さと角の正弦，および外接円の半径との間に，次の関係式が成り立つ。これを **正弦定理** という。

正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

ただし，R は △ ABC の外接円の半径である。

中学校で学んだように，円 O に内接する △ ABC と △ A′BC では，$A = A'$ であり，円の直径の上に立つ円周角は 90° である。また，円に内接する四辺形では，1 組の対角の和は 180° である。



これらを用いて，△ ABC の ∠ A がそれぞれ鋭角，直角，鈍角の場合に

$$\frac{a}{\sin A}=2R$$

が成り立つことを証明してみよう。

(i)　∠ A が鋭角のとき

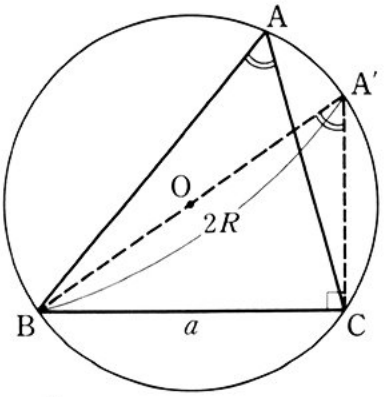
右の図のように，A′B が △ ABC の外接円の直径となるように A′ をとる。

∠ A′CB は直角となるので，

$$BC = A'B \sin A'$$

である。$A = A'$ より

$$a = 2R \sin A \quad \text{すなわち} \quad \frac{a}{\sin A} = 2R$$

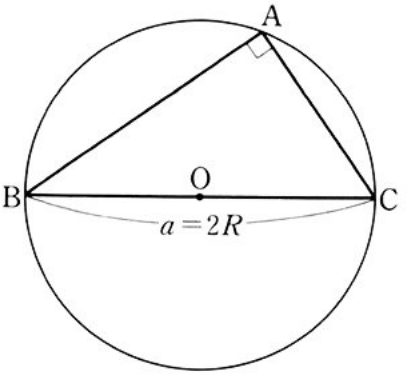


(ii)　∠ A が直角のとき

$\sin 90^\circ = 1$ であるから

$$a = 2R \cdot 1 = 2R \sin 90^\circ$$
$$= 2R \sin A$$

したがって　$\dfrac{a}{\sin A} = 2R$



(iii)　∠ A が鈍角のとき

右の図のように，CA′ が △ ABC の外接円の直径となるように A′ をとる。

∠ A′BC は直角となるので，

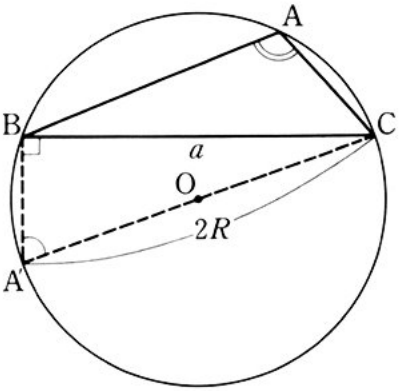
$$BC = A'C \sin A'$$

である。また

$$\sin A = \sin (180^\circ - A') = \sin A'$$

を用いて

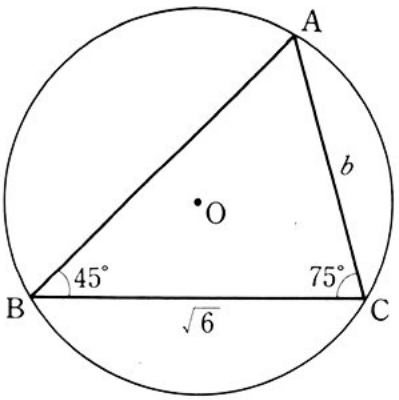
$$a = 2R \sin A \quad \text{すなわち} \quad \frac{a}{\sin A} = 2R$$



以上のことは，∠ B, ∠ C についても同様にして証明される。

例題1 △ABC について，$a=\sqrt{6}$, $B=45^\circ$, $C=75^\circ$ のとき，b および △ABC の外接円の半径 R を求めよ。

解 $A=180^\circ-(45^\circ+75^\circ)=60^\circ$



正弦定理より

$$\frac{b}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}$$

$\sin 45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

であるから

$$b=\sqrt{6}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\div\frac{\sqrt{3}}{2}=2$$

次に，$\dfrac{b}{\sin 45^\circ}=2R$ より　　$R=\dfrac{1}{\sin 45^\circ}=\sqrt{2}$

問1 △ABC について，次の条件を満たすそれぞれの値を求めよ。

(1) $a=8$, $B=20^\circ$, $C=40^\circ$ である外接円の半径 R の値

(2) $a=6\sqrt{3}$, $c=12$, $A=60^\circ$ である B と C の値

問2 △ABC について，等式

$$\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$$

が成り立つとき，△ABC はどんな形の三角形か。

例題2 △ABC で，$A=30^\circ$, $B=120^\circ$ のとき，$a:b:c$ を求めよ。

解 $C=180^\circ-(30^\circ+120^\circ)=30^\circ$

よって　　$a=c$

正弦定理より　　$\dfrac{a}{\sin 30^\circ}=\dfrac{b}{\sin 120^\circ}=2R$

したがって　　$a=2R\times\dfrac{1}{2}$, $b=2R\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ゆえに　　$a:b:c=\dfrac{1}{2}:\dfrac{\sqrt{3}}{2}:\dfrac{1}{2}=1:\sqrt{3}:1$

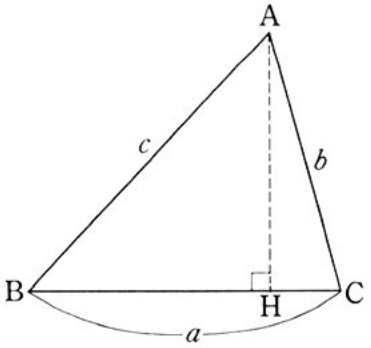
問3 △ABC で，$A=90^\circ$, $B=60^\circ$ のとき，$a:b:c$ を求めよ。

2 余弦定理

△ABC について，∠B を鋭角とする。頂点 A から辺 BC またはその延長上に垂線 AH をひく。

(i)　∠C が鋭角のときは，H は BC 上にあるので

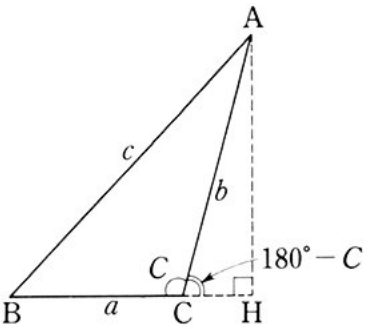
$$a = \mathrm{BH} + \mathrm{HC}$$
$$= c\cos B + b\cos C$$



(ii)　∠C が直角のときは，H は C と重なるが，上の式は成り立つ。

(iii)　∠C が鈍角のときは，H は BC の延長上にあるので

$$a = \mathrm{BH} - \mathrm{CH}$$
$$= c\cos B - b\cos(180^\circ - C)$$
$$= c\cos B + b\cos C$$



以上のことから

$$a = b\cos C + c\cos B \qquad ①$$

同様にして

$$b = c\cos A + a\cos C \qquad ②$$

$$c = a\cos B + b\cos A \qquad ③$$

① に a を掛けて

$$a^2 = ab\cos C + ca\cos B$$

同様にして，②，③ より

$$b^2 = bc\cos A + ab\cos C$$

$$c^2 = ca\cos B + bc\cos A$$

これらより，$a^2 - b^2 - c^2$ を計算して

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

同様にして，次のような，三角形の辺の長さと角の間の関係式すなわち**余弦定理**が得られる。

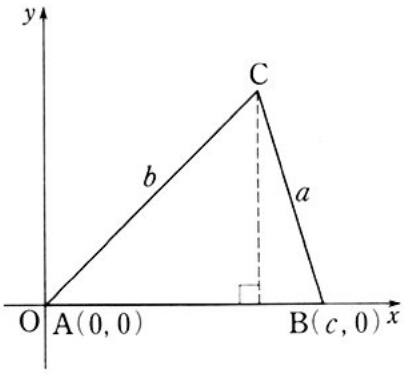
余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

例題3 △ABC で，∠A が鋭角のとき，右の図のように座標を定めて

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

が成り立つことを証明せよ。



証明 右の図より，C の座標は

$(b\cos A,\ \ b\sin A)$

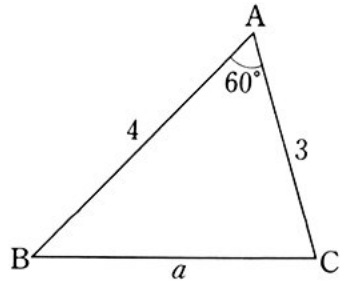
辺 BC の長さ a は，2点 B, C 間の距離であるから

$$a^2 = (c - b\cos A)^2 + (b\sin A)^2$$
$$= c^2 - 2bc\cos A + b^2(\cos^2 A + \sin^2 A)$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

ゆえに　　$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

問4 △ABC について，∠A が鈍角のとき，例題3にならって $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ が成り立つことを証明せよ。

例題4 △ABC について，$b = 3$, $c = 4$, $A = 60^\circ$ のとき，a の値を求めよ。



解 余弦定理より

$$a^2 = 3^2 + 4^2 - 2\cdot 3\cdot 4\cos 60^\circ$$
$$= 9 + 16 - 12 = 13$$

$a > 0$ であるから

$$a = \sqrt{13}$$

問5 》 △ ABC について，次の問に答えよ。

(1) $b = 4,\ c = 6,\ A = 60^\circ$ のとき，a の値を求めよ。

(2) $a = 3,\ b = 4,\ C = 120^\circ$ のとき，c の値を求めよ。

余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ は，変形すると

$$\boldsymbol{\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$$

と表される。他の式も同様にして

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \qquad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

問6 》 △ ABC の3辺が次の値であるとき，∠ A の大きさを求めよ。

(1) $a = \sqrt{5},\ b = \sqrt{2},\ c = 3$

(2) $a = \sqrt{3},\ b = 3,\ c = 2\sqrt{3}$

△ ABC において，A が $0^\circ < A < 180^\circ$ の範囲の値をとるとき，

$\cos A$ の符号と余弦定理から，次の関係が成り立つことがわかる。

$$0^\circ < A < 90^\circ \iff a^2 < b^2 + c^2$$

$$A = 90^\circ \iff a^2 = b^2 + c^2$$

$$90^\circ < A < 180^\circ \iff a^2 > b^2 + c^2$$

例1 》 3辺の長さが，$a = 13,\ b = 12,\ c = 5$ であるならば

$$a^2 = b^2 + c^2$$

ゆえに，△ ABC は，∠ A を 90° とする直角三角形である。

問7 》 3辺の長さが，それぞれ次で与えられる三角形は，鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形のうちのどれになるか調べよ。

(1) 4,　5,　6　　(2) 4,　10,　11

例題5 〉 △ABC について，等式 $a\cos A = b\cos B$ が成り立つとき，△ABC はどんな形の三角形か。

解 〉 与えられた等式の $\cos A$ と $\cos B$ のそれぞれに，余弦定理の式を代入する。

$$a \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = b \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

これを整理すると

$$a^2(b^2 + c^2 - a^2) = b^2(c^2 + a^2 - b^2)$$

$$a^4 - b^4 - c^2(a^2 - b^2) = 0$$

$$(a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0$$

$$(a + b)(a - b)(a^2 + b^2 - c^2) = 0$$

$a > 0$，$b > 0$，$c > 0$ であるから

$$a = b \quad \text{または} \quad a^2 + b^2 = c^2$$

ゆえに，△ABC は，$a = b$ の二等辺三角形であるか，または，$C = 90^\circ$ の直角三角形である。

問8 〉 △ABC について，次の等式が成り立つとき，△ABC はそれぞれどんな形の三角形か。

(1) $b\cos A = a\cos B$　　(2) $b\cos A - a\cos B = c$

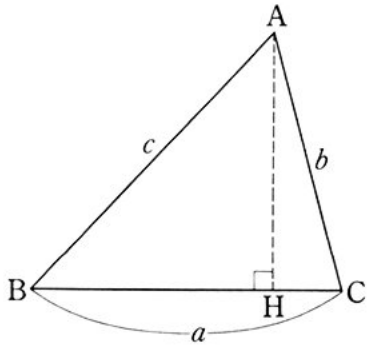
3 三角形の面積

右の図のように，△ABC の頂点 A から辺 BC に垂線 AH をひくと

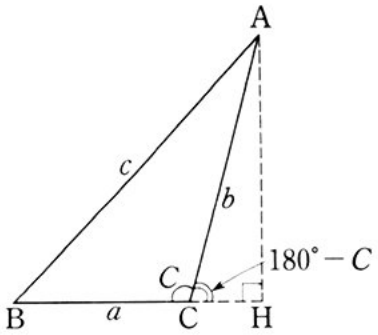
$$\mathrm{AH} = b\sin C$$

△ABC の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AH} = \frac{1}{2}ab\sin C$$



また，辺BCの延長上に垂線AHがあるときは



$$\begin{aligned} \mathrm{AH} &= b\sin(180^\circ - C) \\ &= b\sin C \end{aligned}$$

よって　$S = \dfrac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AH} = \dfrac{1}{2}ab\sin C$

同様にして

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A, \quad S = \frac{1}{2}ca\sin B$$

したがって，次の公式が得られる。

三角形の面積

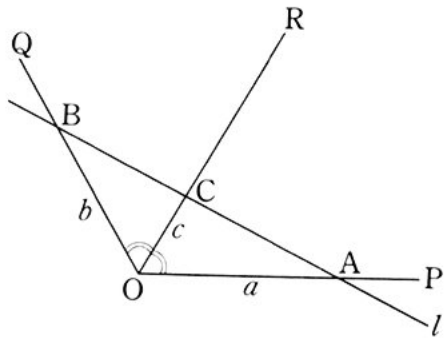
$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C}$$

問9 次の△ABCについて，面積Sをそれぞれ求めよ。

(1)　$b = 4\,\mathrm{m}$,　$c = 5\,\mathrm{m}$,　$A = 60^\circ$

(2)　$a = 2\sqrt{2}\,\mathrm{m}$,　$b = 3\,\mathrm{m}$,　$C = 135^\circ$

例題6 大きさ120°の∠POQの二等分線をORとする。図のように直線lをひき，OP, OR, OQとの交点をそれぞれA, C, Bとし，$\mathrm{OA} = a$, $\mathrm{OC} = c$, $\mathrm{OB} = b$とすると



$$\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

が成り立つことを証明せよ。

証明 △AOB = △AOC + △BOC であるから

$$\frac{1}{2}ab\sin 120^\circ = \frac{1}{2}ac\sin 60^\circ + \frac{1}{2}bc\sin 60^\circ$$

ここで，　　$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

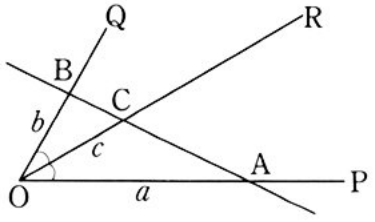
よって　　$ab = ac + bc$

a, b, c は正であるから，両辺を abc で割ると

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$$

が得られる。

問10 大きさ 60° である $\angle$ POQ の二等分線を OR とする。右の図のように，OA, OB, OC をそれぞれ a, b, c とするとき，$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ を c で表せ。



練習問題

1. △ ABC について，$a = 6$, $A = 60^\circ$, $B = 45^\circ$ のとき，b を求めよ。また，△ ABC の外接円の半径を求めよ。

2. 次の条件を満たす △ ABC は，どんな形の三角形か。

(1) $\sin A = 2 \sin C \cos B$

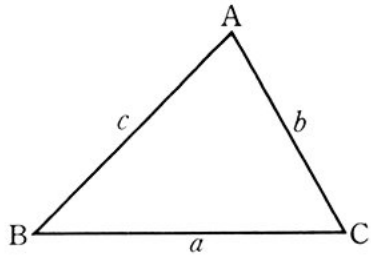
(2) $\dfrac{a}{\cos A} = \dfrac{b}{\cos B} = \dfrac{c}{\cos C}$

3. △ ABC の面積を S, 外接円の半径を R とするとき，次の等式が成り立つことを示せ。

(1) $S = \dfrac{abc}{4R}$　　(2) $S = \dfrac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$

発展 ヘロンの公式

△ ABC の 3 つの辺の長さが，右の図のように a, b, c で与えられたとき，この三角形の面積 S は



$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

で求めることができる。ただし

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

である。この公式を **ヘロンの公式** という。

ヘロンの公式を証明してみよう。

△ ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A \qquad ①$$

である。① 式の中の $\sin A$ を a, b, c で表せばよい。

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = (1+\cos A)(1-\cos A) \qquad ②$$

② に余弦定理

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

を代入して計算する。

$$1+\cos A = \frac{(b^2+2bc+c^2)-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$1-\cos A = \frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{2bc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

いま，$2s = a+b+c$ とおくと

$$\left.\begin{aligned} b+c+a &= 2s \\ b+c-a &= 2s-2a = 2(s-a) \\ a+b-c &= 2s-2c = 2(s-c) \\ a-b+c &= 2s-2b = 2(s-b) \end{aligned}\right\} \qquad ③$$

③ を用いて

$$1+\cos A=\frac{2s(s-a)}{bc},\quad 1-\cos A=\frac{2(s-c)(s-b)}{bc}$$

これらを ② に代入して

$$\sin^2 A=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2c^2}$$

$\sin A>0$ であるから

$$\sin A=\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}$$

これを ① に代入すると

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

すなわち，ヘロンの公式が証明された。

たとえば，△ABC について，$a=6,\ b=3,\ c=7$ のとき

$$s=\frac{6+3+7}{2}=8$$

であるから，△ABC の面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{8(8-6)(8-3)(8-7)}\\&=\sqrt{8\times2\times5\times1}\\&=4\sqrt{5}\end{aligned}$$

○　△ABC について，$a=13,\ b=14,\ c=15$ のとき，△ABC の面積を求めてみよ。

○　△ABC について，$a=12,\ b=5,\ c=13$ とし，その面積を S とする。

(1)　ヘロンの公式を用いて，面積 S を求めてみよ。

(2)　$\angle C$ が直角であることを示し，$S=\frac{1}{2}ab\sin C$ から面積 S を求めてみよ。

第7章の問題

A

1. $\angle C = 90^\circ$ である直角三角形 ABC について，$\tan A = \frac{7}{24}$ のとき，$\sin A$ と $\cos A$ を求めよ。

2. 次の等式を満たす θ を，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲で求めよ。

(1) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$　(2) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$　(3) $\sqrt{3}\tan\theta = -1$

3. 次の等式を満たす θ は，鋭角であるか鈍角であるかを示し，おのおのについて，残りの三角比を求めよ。

(1) $\cos\theta = -\frac{9}{41}$　(2) $\tan\theta = -\frac{5}{12}$

4. △ ABC の外接円の半径を 2 とし，$a = 2\sqrt{3}$，$b = 2\sqrt{2}$ であるとき，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ の大きさを求めよ。

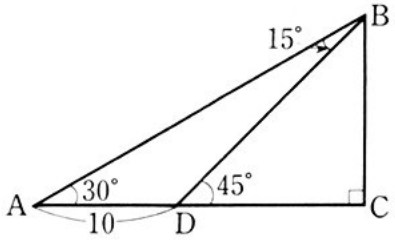
5. △ ABC の外接円の中心を O とし，半径を 2 とする。$\angle AOB = 120^\circ$，$\angle BOC = 150^\circ$，$\angle COA = 90^\circ$ であるとき，△ ABC の面積を求めよ。

6. △ ABC について，$a = \sqrt{5}$，$b = \sqrt{2}$，$\cos C = \frac{3}{\sqrt{10}}$ のとき，$\sin A$，$\sin B$，$\sin C$ の値を求めよ。

7. $\angle C = 90^\circ$，$\angle A = 30^\circ$ の直角三角形 ABC について，右の図のように AC 上に D をとり，$\angle BDC = 45^\circ$，AD = 10 とする。

(1) BC の長さを求めよ。

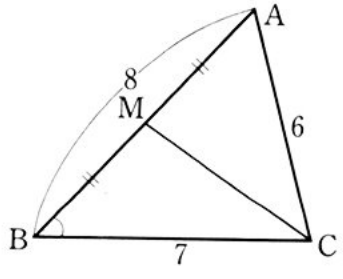
(2) 右の図を用いて $\sin 15^\circ$ を求めよ。



8. 右の図の △ ABC について，BC = 7，AC = 6，AB = 8 とし，辺 AB の中点を M とする。

(1) $\cos B$ を求めよ。

(2) CM の長さを求めよ。



B

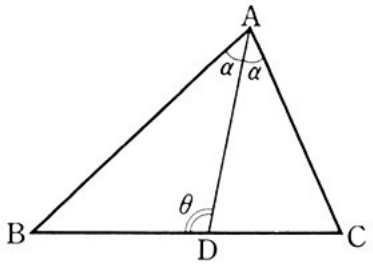
1. △ABC について，次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $\sin\dfrac{B+C}{2}=\cos\dfrac{A}{2}$　　(2) $\sin(B+C-A)=\sin 2A$

2. △ABC について，∠A の二等分線が BC と交わる点を D とするとき

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$$

が成り立つことを証明せよ。



3. △ABC について，次のそれぞれの等式が成り立つとき，△ABC はどんな形の三角形か。

(1) $a\cos A+b\cos B=c\cos C$

(2) $ac\cos A-bc\cos B=(a^2-b^2)\cos C$

4. △ABC について，∠A = 30°，∠B = 135° のとき，

$c=a\cos B+b\cos A$ が成り立つことを用いて，

$$a:b:c=2:2\sqrt{2}:(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

であることを示せ。

5. 半径 2 の円に内接する △ABC があり，3 辺の比は

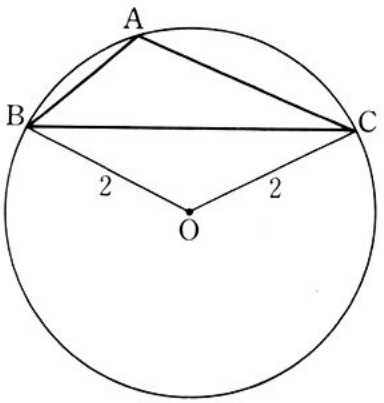
$$BC:CA:AB=7:5:3$$

であるという。

(1) $\cos A$ と $\sin A$ を求めよ。

(2) BC の長さを求めよ。

(3) △ABC の面積を求めよ。



解答 （証明，グラフおよび表などは省略）

第1章の問題 19，20

A

1. (1) 6 (2) $\frac{1}{6}$ (3) $a-b$

3. (1) $2+\sqrt{2}-\sqrt{3}$
(2) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$
(3) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$
(4) $2+\sqrt{2}-\sqrt{3}$

4. (1) $2\sqrt{6}$ (2) $-\frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{4}$
(3) $-2\sqrt{6}$ (4) $\frac{16\sqrt{7}}{9}$

5. (1) 11 (2) 10
(3) 1 (4) $-4\sqrt{6}$

6. (1) $2\sqrt{3}-3$
(2) $2-\frac{\sqrt{6}}{2}$

7. (1) $A\cap B$
$=\{x\mid 3<x\leqq 4,\ x$ は実数$\}$
(2) $B\cup C$
$=\{x\mid 3<x\leqq 10,\ x$ は実数$\}$
(3) $B\cap C=\phi$
(4) $\overline{A}\cap\overline{C}$
$=\{x\mid 4<x<6$ または $x>10,$
x は実数$\}$

B

1. (1) 正，負 (2) 負，正

2. $x\geqq 2$ のとき $2x-3$
$1<x<2$ のとき 1
$x\leqq 1$ のとき $-2x+3$

3. (1) $\sqrt{10}$
(2) 8
(3) $-2\sqrt{15}$

4. (1) 32
(2) $\sqrt{6}-4$
(3) $\sqrt{5}$

5. $a=1,\ a^2+2ab+2b^2=3$

6. (1) 25 (2) 17 (3) 8
(4) 17 (5) 17 (6) 17

第2章の問題 47，48

A

1. (1) $-3x^3-4x$
(2) $\frac{1}{6}(x^2+13y^2)$

2. (1) $16y^3+12yx^2$
(2) $8a^3+27b^3$
(3) x^8-y^8

3. (1) $(a-b)(a-c)$
(2) $2mx(x+2)(x-6)$
(3) $(2x-1)(x+2a)$
(4) $(3x+4y)(2x-3y)$
(5) $(x-y-2)(x-y-1)$
(6) $(a+2b)(a-4b)(a-b)$

4. (1) 最大公約数 $x+2$
最小公倍数
$x(x-2)(x+2)(x-5)$
(2) 最大公約数 $a-b$
最小公倍数
$(a+b)(a-b)(a+2b)$
$\times(a^2+ab+b^2)$

5. x^2+2x-3

6. (1) $\frac{3(3x+4)}{(x-2)(x+3)(x+1)}$
(2) $\frac{3x+2}{3x-1}$

7. (1) 10^{-1} (2) 3×10^3

B

1. (1) $4ab$

(2) $x^6 - 729$

2. (1) $(x + 3y)(x - 3y)(x^2 - 5y^2)$

(2) $(x^2 + 3x + 3)(x + 1)(x + 2)$

(3) $(b - c)(a - b)(a - c)$

(4) $(ab + bc + ca)(a + b + c)$

3. $(2x + 1)(x + 2)$ と $(2x + 1) \times (x + 3)$, $(2x + 1)$ と $(2x + 1)(x + 2)(x + 3)$

4. (1) $\dfrac{2(x^2 + x + 1)}{x(x - 1)(x + 1)(x + 2)}$

(2) $\dfrac{x + y + 1}{y(x + y - 1)}$

(3) $\dfrac{2(x - y)}{x + y}$

(4) 1

5. (1) $\dfrac{4}{x(x + 4)}$

(2) $\dfrac{4}{x(x + 8)}$

第3章の問題 *85, 86*

A

1. (1) $10 + \sqrt{2}\,i$

(2) $11 - 7i$

(3) $1 - i$

(4) $\dfrac{\sqrt{2} - 2i}{6}$

2. (1) $x = \dfrac{1}{3}, 2$

(2) $6 \pm 2\sqrt{2}$

(3) $\dfrac{-5 \pm \sqrt{35}\,i}{6}$

(4) $x = 4, \quad -1 \pm \sqrt{2}$

3. $m = -1, 7$

$m = -1$ のとき, $x = -1$

$m = 7$ のとき, $x = 3$

4. (1) -15 (2) $-\dfrac{7}{16}$

(3) $\dfrac{5}{2}$

5. (1) $x^2 - 4x + 1 = 0$

(2) $x^2 - 6x + 11 = 0$

6. (1) $(x^2 - 3)(x^2 + 2)$

(2) $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x^2 + 2)$

(3) $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) \times (x + \sqrt{2}\,i)(x - \sqrt{2}\,i)$

7. (1) $x = -1, y = 2, z = -3$

(2) $x = -8, y = 20$

$x = 3, \quad y = -2$

8. 余り $3x + 4$

9. (1) $-\dfrac{2}{3} \leqq x \leqq 1$

(2) $x < \dfrac{3}{2}, \quad x > \dfrac{7}{2}$

(3) 実数全体

(4) 解なし

10 (1) $-\dfrac{4}{3} < x < 3$

(2) $-\dfrac{1}{2} \leqq x < 0$

(3) $x < -2, 3 \leqq x$

(4) $-2 < x < 0$

B

1. (1) $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}, \sqrt{3} - \sqrt{2}, -\sqrt{3} + \sqrt{2}, -\sqrt{3} - \sqrt{2}$

(2) $x = 1, 2, \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$

(3) $x = -4, 1, \dfrac{-3 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$

(4) $-3, 2, \dfrac{-1 \pm \sqrt{15}i}{2}$

2. $a = -4, b = 5$

$f(2 - i) = -39 - 10i$

3. $\dfrac{1 + i}{\sqrt{2}}, \quad -\dfrac{1 + i}{\sqrt{2}}$

4. (1) $a = -1,\ b = 30$
(2) 5

5. (1) $-\dfrac{7}{5} < k < -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
(2) $k \leqq -\dfrac{7}{5},\ -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \leqq k$

6. $5+\sqrt{7}$ と $5-\sqrt{7}$

第4章の問題 *109, 110*

A

2. (1) $a = -9,\ b = 27,\ c = -27$
(2) $a = 4,\ b = -2,\ c = 3$

4. (1) 真 (2) 真 (3) 偽
(反例) $m = 1,\ n = 4$

5. (1) 十分 (2) 必要十分 (3) 必要
(4) 必要

B

4. (1) 真 (2) 偽
(反例) $a = \sqrt{2},\ b = -\sqrt{2}$

5. (1) $x \neq 1$ または $y > 4$
(2) 自然数 n は素数

第5章の問題 *143, 144*

A

1. (1) $-\dfrac{1}{8} \leqq y \leqq 15$
(2) $3 \leqq y \leqq 13$
(3) $y \leqq -1,\ 1 < y$
(4) $1 \leqq y \leqq \sqrt{5}$

2. (1) $\left(\dfrac{11}{6},\ -4\right)$ (2) $(4,\ 0)$

3. (1) $y = -x^2 - 4x - 4$
(2) $y = -x^2 + \dfrac{4}{3}x + \dfrac{11}{36}$
(3) $y = -x^2 - 6x - 8$

4. 両方とも $\dfrac{1}{2}$

5. ① $a > 0,\ b < 0,\ c > 0$
$b^2 - 4ac > 0$
② $a < 0,\ b > 0,\ c < 0$
$b^2 - 4ac < 0$
③ $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$
$b^2 - 4ac = 0$

6. $a = -2,\ b = 1$

8. (1) $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$ $(x \leqq 3)$
(2) $y = -\sqrt{x} - 1$ $(x \geqq 0)$
(3) $y = \dfrac{-2}{x-1} - 1$ $(x \neq 1)$
(4) $y = \dfrac{5}{x-2} + 2$ $(x \neq 2)$

B

1. $k = \pm 2\sqrt{2}$
$k = 2\sqrt{2}$ のとき $x = 3$
最大値 $19 + 6\sqrt{2}$
$k = -2\sqrt{2}$ のとき $x = 3$
最大値 $19 - 6\sqrt{2}$

2. (1) $k = \dfrac{2 \pm \sqrt{7}}{2}$
(2) $k < \dfrac{2-\sqrt{7}}{2},\ \dfrac{2+\sqrt{7}}{2} < k$
(3) $\dfrac{2-\sqrt{7}}{2} < k < \dfrac{2+\sqrt{7}}{2}$

4. $\dfrac{b}{2}$

6. $x = \dfrac{1+\sqrt{1+a}}{a}$

第6章の問題 179, 180

A

1. (1) $\sqrt{10}$ (2) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$

(3) $\left(0, \frac{11}{3}\right)$ (4) $\left(-\frac{13}{2}, \frac{3}{2}\right)$

3. (1) $2x + 3y + 11 = 0$

(2) $3x - 2y - 29 = 0$

4. -5

5. -3

6. (1) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 13$

(2) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 17$

(3) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 4$

(4) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$

7. $y = -\frac{5}{3}x + 1$

8. $y = x + \frac{9}{5}$, $y = x + 6$

9. $(x+3)^2 + (y-7)^2 = 59$

B

1. $(1+\sqrt{3}, -1-2\sqrt{3})$ と
$(1-\sqrt{3}, -1+2\sqrt{3})$

2. $\left(\frac{27}{5}, \frac{9}{5}\right)$

3. $k = 1$, 中心の座標 $\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$

半径 $\frac{3}{2}\sqrt{5}$

4. $(2, 1), (1, -2)$

5. $m < -\frac{4}{3}$ のとき 0個

$m = -\frac{4}{3}$ のとき 1個

$-\frac{4}{3} < m < 0$ のとき 2個

$m = 0$ のとき 1個

$m > 0$ のとき 0個

6. $\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{100}{9}$

8. 最大値 $\frac{7}{2}$, 最小値 0

第7章の問題 205, 206

A

1. $\sin A = \frac{7}{25}$, $\cos A = \frac{24}{25}$

2. (1) $60^\circ, 120^\circ$ (2) 150° (3) 150°

3. (1) 鈍角, $\sin\theta = \frac{40}{41}$,

$\tan\theta = -\frac{40}{9}$

(2) 鈍角, $\cos\theta = -\frac{12}{13}$,

$\sin\theta = \frac{5}{13}$

4. $A = 60^\circ, B = 45^\circ, C = 75^\circ$ または
$A = 120^\circ, B = 45^\circ, C = 15^\circ$

5. $3 + \sqrt{3}$

6. $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin B = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin C = \frac{\sqrt{10}}{10}$

7. (1) $5(\sqrt{3}+1)$

(2) $\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

8. (1) $\frac{11}{16}$ (2) $\frac{\sqrt{106}}{2}$

B

3. (1) $A = 90^\circ$ または $B = 90^\circ$ の直角三角形

(2) BC = CA の二等辺三角形
または $C = 90^\circ$ の直角三角形

5. (1) $\cos A = -\frac{1}{2}$, $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $2\sqrt{3}$ (3) $\frac{45}{49}\sqrt{3}$

さくいん

あ行

i 52
余り 37
余りの定理 71
因数 31, 38
因数定理 72
因数分解
　整式の 31, 32, 33
　2次式の 64
上に凸 117
裏 106
n 次式 22
n 次方程式 73
円 162, 168
演算と符号の規則 6
円の接線 165
円の内部と外部 173
円の方程式 162

か行

解
　2次不等式の 79, 81, 82
　2次方程式の 50
　不等式の 76
外心 164
解と係数の関係 63
解なし 81
解の公式 58, 59
外分点
　数直線上の 148
　平面上の 151
解を判別する 61
仮定 100
関数 112
関数の値 112
関数のグラフ 115
偽 100
軌跡 168
逆 106
逆関数 138
逆関数のグラフ 140
既約分数式 40
共通部分 15
共役な複素数 53
虚根 60
虚数 52
虚数解 60
虚数単位 52
距離
　数直線上の2点間の 7, 146
　点と直線の 159
　平面上の2点間の 149
空集合 14
係数 22
結合法則 4
結論 100
原点 2
項 22
交換法則 4
高次方程式 73
恒等式 88
公倍数 38
降べきの順 23
公約数 38
コサイン 182
根 50

さ行

最小公倍数 38
最大公約数 38
最大値・最小値
　関数の 123
　領域と 176
サイン 182
座標 3, 114
座標平面 114
三角形の面積 201
三角比 183
3乗根 74
軸 117
指数 26
指数法則 26, 46
次数
　多項式の 22
　単項式の 22
自然数 2
下に凸 117

実根 60
実数 3
実数解 60
実数の大小 5
集合 12
重根 60
重心 152
従属変数 112
重複解 60
十分条件 101
商 36, 37
象限 114
条件 100
乗法公式 28, 29
真 100
真部分集合 14
垂心 160
垂直条件 157
数直線 3
正弦 182
正弦定理 194
整式 22
整数 2
正接 183
正の整数 2
整理 23
接する 125
接線 165
接線の方程式 165
絶対値 7
接点 125, 165
漸近線 131
全体集合 16
相加平均 97
相乗平均 97
属さない 13
属する 13

た行

第1～第4象限 114
対偶 106
たがいに共役な複素数 53
たがいに素 39
多項式 22
単位点 2
単項式 22
タンジェント 183
値域 113
頂点 117
直線の方程式 153
直角双曲線 130
通分 41
定義域 113
定数項 22
展開 27
同値 102
同類項 23
独立変数 112
閉じている 2
ド＝モルガンの法則 18, 105

な行

内分点
　数直線上の 146
　平面上の 151
2次関数 116
2次関数の最大・最小 123
2次式の因数分解 64
2次不等式 77
2次方程式 50
二重根号 11
2乗の和の公式 186
2点を通る直線 155

は行

倍数 38
背理法 107
判別式 61
反例 104
必要十分条件 102
必要条件 101
否定 105
等しい 14
等しくない 14
比例式 93
複素数 52
不等式 76
不等式を解く 76
負の実数の平方根 56
負の整数 2
部分集合 13
分子 40
分数関数 130
分数式 40
分配法則 4
分母 40
分母を有理化する 10

平行移動
　関数の 119, 121, 132
　点の 114
平行条件 156
平方 26
平方根 9
平方根の積と商 9
ヘロンの公式 203
変数 112
方程式の表す図形 153
方程式のグラフ 153
方程式を解く 50
放物線 116
補集合 16

ま行

交わり 15
結び 15
無理関数 134
無理数 3
命題 100

や行

約数 38
約分 40
有理式 40
有理数 2
要素 12
余弦 182
余弦定理 198

ら行

立方 26
立方根 74
領域
　不等式の表す 172
　連立不等式の表す 174
累乗 26
連立3元1次方程式 66

わ行

和集合 15
割りきれる 36

ギリシア文字

大文字	小文字	発音	大文字	小文字	発音	大文字	小文字	発音
A	α	アルファ	I	ι	イオタ	P	ρ	ロー
B	$\beta, \varbeta$	ベータ	K	κ	カッパ	Σ	σ, ς	シグマ
Γ	γ	ガンマ	Λ	λ	ラムダ	T	τ	タウ
Δ	δ, ∂	デルタ	M	μ	ミュー	Υ	υ	ウプシロン
E	ε	イプシロン	N	ν	ニュー	Φ	ϕ, φ	ファイ
Z	ζ	ジータ	Ξ	ξ	グザイ	X	χ	カイ
H	η	イータ	O	o	オミクロン	Ψ	ψ	プサイ
Θ	θ, ϑ	シータ	Π	π	パイ	Ω	ω	オメガ

20世紀以前の おもな数学者と数学の歩み

バビロニアの
粘土板

B.C.2000

バビロニアで60進法が使われる。分数・平方根の掛け算・2次方程式の解法などを粘土板に残す。

エジプトで測量の幾何学・分数の和と積・2次方程式の解法などをパピルスに残す。

B.C.1000

タレス（二等辺三角形の2つの底角は等しい。）

ピタゴラス（三平方の定理，数と幾何学の研究）

プラトン（論理学）

ユークリッド『幾何学原論』

ヒッパルコス（正弦の表のもとを作成）

B.C.500

ヘロン（ヘロンの公式）

アリストテレス（数学を例とした論理構造）

アルキメデス（円周率の計算法のほか，平面図形の面積や重心の求め方）

0

ヨーロッパ各地で大学が創設される。

アポロニウス（円すい曲線の研究）

1000

プトレマイオス『アルマゲスト』（正弦表の作成）

ディオファントス『算術』

500

ブラフマ・グプタ（0の性質，2次方程式の解法）

アル・フワリズミ（代数という言葉を用いた最初の本）

アル・バッタニ（正弦表を作り三角法を改良，sineの語源を作る。）

アブ・ル・ワファ（正弦の表の作成，正接の導入）

ヴィエタ（方程式に文字の使用をはじめて導入）

算術計算に等号が使われはじめる。

カルダノ『大いなる術』（3次方程式の一般的解法）

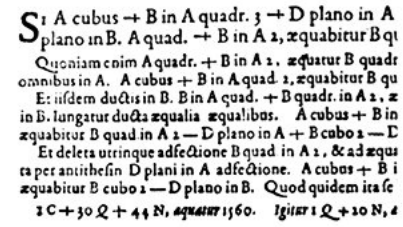
ウィドマン『実用数学』の中で
＋と－の記号が使われる。

1300

1400

1500

印刷機が発明され，古典が出版される。



Si A cubus + B in A quadr. 3 + D plano in A
plano in B. A quad. + B in A 2, æquabitur B qu

Quoniam enim A quadr. + B in A 2, æquatur B quadr
omnibus in A. A cubus + B in A quad. 2, æquabitur B qu
Et iisdem ductis in B. B in A quad. + B quadr. in A 2, æ
in B. iungatur ducta æqualia æqualibus. A cubus + B in
æquabitur B quad in A 2 — D plano in A + B cubo 2 — D
Et deleta utrinque adfectione B quad in A 2, & ad æqua
ta per antithesin D plani in A adfectione. A cubus + B i
æquabitur B cubo 2 — D plano in B. Quod quidem ita se

1 C + 30 Q + 44 N, æquatur 1560. Igitur 1 Q + 10 N, æ

ヴィエタの記号

最初の＋と－の記号

太線は各人物の生きた年代
を示す。『　』内は書名。

カントル

ヒルベルト『幾何学基礎論』のほか，1900年のパリの
国際会議で23項よりなる研究計画を提出。

ポアンカレ『天体力学の新方法』

カントル（集合論の創始）

1900

アーベル

リーマン
『幾何学の基礎をなす仮説』で相対性理論への道を開く。

アーベル（一般5次方程式の代数的
解法がないことを証明）

ガロア（群と方程式と
の関係を解明）

ガウス（整数論と複素数の概念の確立のほか，
数学と自然科学の多くの分野で活躍）

コーシー（解析学を一新）

ガウス

1800

ラグランジュ『解析力学』のほか，メートル法
の制定に活躍。

1700

オイラー『無限解析概論』のほか，数学のあらゆる分野
を研究。

オイラー

ニュートン『自然哲学の数学的諸原理（プリンキピア）』
（微積分学の創造）

ライプニッツ（微積分学の創造と記号論理学の創設）

パスカル『幾何学の精神』のほか，計算器の製作と確率論の創造

1600

フェルマ（整数論の研究と確率論の創造）

ガリレイ『新科学対話』（投げられた物体は放物線を
えがくことを説明）

デカルト『方法序説』，『幾何学』のほか，解析幾何学
の創始と文字を使う代数学の確立

デカルト

ライプニッツ

ケプラー（回転体の体積の研究）

ネーピア『対数法則の記述』（対数の創案）

平方・平方根・逆数表

n	n^2	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\frac{1}{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\frac{1}{n}$
1	1	1.0000	3.1623	1.00000	**51**	2601	7.1414	22.5832	0.01961
2	4	1.4142	4.4721	0.50000	**52**	2704	7.2111	22.8035	0.01923
3	9	1.7321	5.4772	0.33333	**53**	2809	7.2801	23.0217	0.01887
4	16	2.0000	6.3246	0.25000	**54**	2916	7.3485	23.2379	0.01852
5	25	2.2361	7.0711	0.20000	**55**	3025	7.4162	23.4521	0.01818
6	36	2.4495	7.7460	0.16667	**56**	3136	7.4833	23.6643	0.01786
7	49	2.6458	8.3666	0.14286	**57**	3249	7.5498	23.8747	0.01754
8	64	2.8284	8.9443	0.12500	**58**	3364	7.6158	24.0832	0.01724
9	81	3.0000	9.4868	0.11111	**59**	3481	7.6811	24.2899	0.01695
10	100	3.1623	10.0000	0.10000	**60**	3600	7.7460	24.4949	0.01667
11	121	3.3166	10.4881	0.09091	**61**	3721	7.8102	24.6982	0.01639
12	144	3.4641	10.9545	0.08333	**62**	3844	7.8740	24.8998	0.01613
13	169	3.6056	11.4018	0.07692	**63**	3969	7.9373	25.0998	0.01587
14	196	3.7417	11.8322	0.07143	**64**	4096	8.0000	25.2982	0.01563
15	225	3.8730	12.2474	0.06667	**65**	4225	8.0623	25.4951	0.01538
16	256	4.0000	12.6491	0.06250	**66**	4356	8.1240	25.6905	0.01515
17	289	4.1231	13.0384	0.05882	**67**	4489	8.1854	25.8844	0.01493
18	324	4.2426	13.4164	0.05556	**68**	4624	8.2462	26.0768	0.01471
19	361	4.3589	13.7840	0.05263	**69**	4761	8.3066	26.2679	0.01449
20	400	4.4721	14.1421	0.05000	**70**	4900	8.3666	26.4575	0.01429
21	441	4.5826	14.4914	0.04762	**71**	5041	8.4261	26.6458	0.01408
22	484	4.6904	14.8324	0.04545	**72**	5184	8.4853	26.8328	0.01389
23	529	4.7958	15.1658	0.04348	**73**	5329	8.5440	27.0185	0.01370
24	576	4.8990	15.4919	0.04167	**74**	5476	8.6023	27.2029	0.01351
25	625	5.0000	15.8114	0.04000	**75**	5625	8.6603	27.3861	0.01333
26	676	5.0990	16.1245	0.03846	**76**	5776	8.7178	27.5681	0.01316
27	729	5.1962	16.4317	0.03704	**77**	5929	8.7750	27.7489	0.01299
28	784	5.2915	16.7332	0.03571	**78**	6084	8.8318	27.9285	0.01282
29	841	5.3852	17.0294	0.03448	**79**	6241	8.8882	28.1069	0.01266
30	900	5.4772	17.3205	0.03333	**80**	6400	8.9443	28.2843	0.01250
31	961	5.5678	17.6068	0.03226	**81**	6561	9.0000	28.4605	0.01235
32	1024	5.6569	17.8885	0.03125	**82**	6724	9.0554	28.6356	0.01220
33	1089	5.7446	18.1659	0.03030	**83**	6889	9.1104	28.8097	0.01205
34	1156	5.8310	18.4391	0.02941	**84**	7056	9.1652	28.9828	0.01190
35	1225	5.9161	18.7083	0.02857	**85**	7225	9.2195	29.1548	0.01176
36	1296	6.0000	18.9737	0.02778	**86**	7396	9.2736	29.3258	0.01163
37	1369	6.0828	19.2354	0.02703	**87**	7569	9.3274	29.4958	0.01149
38	1444	6.1644	19.4936	0.02632	**88**	7744	9.3808	29.6648	0.01136
39	1521	6.2450	19.7484	0.02564	**89**	7921	9.4340	29.8329	0.01124
40	1600	6.3246	20.0000	0.02500	**90**	8100	9.4868	30.0000	0.01111
41	1681	6.4031	20.2485	0.02439	**91**	8281	9.5394	30.1662	0.01099
42	1764	6.4807	20.4939	0.02381	**92**	8464	9.5917	30.3315	0.01087
43	1849	6.5574	20.7364	0.02326	**93**	8649	9.6437	30.4959	0.01075
44	1936	6.6332	20.9762	0.02273	**94**	8836	9.6954	30.6594	0.01064
45	2025	6.7082	21.2132	0.02222	**95**	9025	9.7468	30.8221	0.01053
46	2116	6.7823	21.4476	0.02174	**96**	9216	9.7980	30.9839	0.01042
47	2209	6.8557	21.6795	0.02128	**97**	9409	9.8489	31.1448	0.01031
48	2304	6.9282	21.9089	0.02083	**98**	9604	9.8995	31.3050	0.01020
49	2401	7.0000	22.1359	0.02041	**99**	9801	9.9499	31.4643	0.01010
50	2500	7.0711	22.3607	0.02000	**100**	10000	10.0000	31.6228	0.01000

三角比の表

角	正弦 (sin)	余弦 (cos)	正接 (tan)	角	正弦 (sin)	余弦 (cos)	正接 (tan)
0°	0.0000	1.0000	0.0000	**45°**	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	**46°**	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	**47°**	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	**48°**	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	**49°**	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	**50°**	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	**51°**	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	**52°**	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	**53°**	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	**54°**	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	**55°**	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	**56°**	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	**57°**	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	**58°**	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	**59°**	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	**60°**	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	**61°**	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	**62°**	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	**63°**	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	**64°**	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	**65°**	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	**66°**	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	**67°**	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	**68°**	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	**69°**	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	**70°**	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	**71°**	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	**72°**	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	**73°**	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	**74°**	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	**75°**	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	**76°**	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	**77°**	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	**78°**	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	**79°**	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	**80°**	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	**81°**	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	**82°**	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	**83°**	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	**84°**	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	**85°**	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	**86°**	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	**87°**	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	**88°**	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	**89°**	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	**90°**	1.0000	0.0000	——

◉＝著作者　石井　純　弘前大学教授
佐伯卓也　岩手大学教授
安藤英夫　秋田大学教授
猪狩　惺　東北大学教授
阿部英一　筑波大学教授
稲垣信夫　埼玉大学教授
柳原二郎　千葉大学教授
吹田信之　東京工業大学教授
富山　淳　東京都立大学教授
宮寺　功　早稲田大学教授
若桑英清　東京学芸大学教授
和田淳蔵　早稲田大学教授
吉原健一　横浜国立大学教授
大林忠夫　信州大学教授
梅沢敏郎　静岡大学教授
旦代晃一　京都大学教授
土井公二　立命館大学教授
大山　豪　大阪教育大学教授
奥山晃弘　神戸大学教授
木村郁雄　神戸大学教授
脇本和昌　岡山大学教授
田代嘉宏　広島大学教授
倉田吉喜　山口大学教授
工藤昭夫　九州大学教授
大和　元　鹿児島大学教授

◉＝編集協力者　菊地　勇　昭和第一高等学校教諭
駒野　誠　東京都立小岩高等学校教諭

◉装丁＝杉田　豊＋篠崎三朗
◉本文写植＝笹氣出版印刷株式会社
◉図版＝日本工房

昭和59年3月31日　文部省検定済
昭和62年3月31日　改訂検定済——数Ⅰ　092

数学Ⅰ 改訂版

著作者——阿部英一
稲垣信夫
工藤昭夫
田代嘉宏
旦代晃一
宮寺　功
ほか19名

昭和63年3月25日　初版印刷
昭和63年3月30日　初版発行
昭和64年3月25日　再版印刷
昭和64年3月30日　再版発行

東京都千代田区三崎町二丁目22番14号
発行者——株式会社三　省　堂
代表者　守屋眞明

東京都八王子市石川町2951番地9
印刷者——三省堂印刷株式会社
代表者　石川信之

東京都千代田区三崎町二丁目22番14号
発行所——株式会社三　省　堂
〒101　電話——編集(03)230-9411
販売(03)230-9412
総務(03)230-9511

定価＝文部大臣が認可し官報で告示した定価（上記の定価は，各教科書取次供給所に表示します。）

著作権所有者の許可なく本書の自習書・学習書・ワークブックその他これらに準ずるものの無断発行を禁じます。

略称　63改訂数Ⅰ

佐藤恭一

改訂版

数学 I

三省堂